TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

HỘI TOÁN HỌC HÀ NỘI

HỘI THẢO KHOA HỌC

MỘT SỐ CHUYÊN ĐỀ TOÁN CHỌN LỌC CẬP NHẬT CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018

Cao Lãnh, ngày 29 tháng 10 năm 2023

MỤC LỤC

BA MƯƠI NĂM - CHẶNG ĐƯỜNG CÁC KỲ THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TOÀN QUỐC

Nguyễn Văn Mậu*
Hội Toán học Hà Nội

Các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên giữa các trường đại học và cao đẳng trong cả nước từ lâu đã trở thành nếp sinh hoạt giao lưu truyền thống trong lớp lớp các thế hệ sinh viên đam mê học toán, mong muốn tìm hiểu các ứng dụng phong phú và đa dạng của Toán học trong nhịp sống thường nhật của đời sống kinh tế xã hội hiện đại. Đã qua 30 kỳ thi Olympic được tổ chức hằng năm vào tháng 4 đầu tháng 5 nhằm kỷ niệm chiến thắng 30 tháng 4 - ngày giải phóng miền Nam thống nhất đất nước và chào mừng sinh nhật Bác Hồ kính yêu - ngày 19 tháng 5 lịch sử. Kể từ kỳ thi Olympic Toán học sinh viên lần thứ nhất được tổ chức vào năm 1993, tại Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội (nay là trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Hà Nội), chỉ với sự tham gia của ba trường đại học là Đại học Bách khoa Hà Nội, Đại học Sư phạm Hà Nội và Đại học Tổng hợp Hà Nội. Tiếp theo, các kỳ thi Olympic Toán học lần lượt được tổ chức đều đặn thường niên tại Đại học Bách khoa Hà Nội (1994), Đại học Sư phạm Hà Nội (1995), Đại học Xây dựng Hà Nội (1996), Học viện Kỹ thuật Quân sự (1997), Đại học Mỏ địa chất (1998), Đại học Giao thông Hà Nội (1999), Đại học Thuỷ lợi (2000). Đặc biệt, tại kỳ Olympic lần thứ IX, lần đầu tiên Olympic Toán học được tiến hành song song đồng thời ở hai hội đồng thi tại Hà Nội (Đại học Ngoại thương, Cơ sở 1 Hà Nội) và tại Thành phố Hồ Chí Minh (Đại học Ngoại thương, Cơ sở 2 Thành phố Hồ Chí Minh) (2001). Tiếp đến, kỳ Olympic lần thứ X được tổ chức đồng thời ở Đại học Kinh tế Quốc dân Hà Nội và Đại học Kinh tế Thành phố Hồ Chí Minh (2002). Sau đó, các kỳ Olympic Toán học sinh viên lại nối tiếp được tổ chức thống nhất ở một địa điểm, tại Đại học Bách khoa Thành phố Hồ Chí Minh (2003), Đại học Quy Nhơn (2004), Đại học Sư phạm Huế (2005), Đại học Đà Nẵng (2006), Đại học Vinh (2007), Học viện Hải quân Nha Trang (Khánh Hoà, 2008), Đại học Quảng Bình (2009), Đại học Khoa học Huế (2010) và Đại học Quy Nhơn (2011). Các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên giữa các trường đại học và cao đẳng trong cả nước được khởi động do sáng kiến của các khoa Toán thuộc Đại học Tổng hợp và Đại học Bách khoa Hà Nội. Từ kỳ Olympic Toán học lần thứ 4 tại Đại học Xây dựng Hà Nội, cuộc thi này chính thức được sự bảo trợ của Hội Toán học Việt nam (về chuyên môn) kết hợp với Bộ Giáo dục và Đào Tạo, Hội Sinh viên Việt nam và trường đại học cơ sở đăng cai trực tiếp điều hành các công việc về tổ chức, khánh tiết và tham quan - thực địa cho các đoàn tham gia. Nhìn lại chặng đường 30 năm đã đi qua, mỗi chúng ta ngày càng thấy rõ hơn vai trò và ý nghĩa to lớn đối với các cơ sở đào tạo qua từng kỳ thi Olympic Toán học sinh viên. Đó là các hoạt động chuyên môn sôi nổi đầy hấp dẫn, rất cần thiết và có ý nghĩa

*GS.TSKH Nguyễn Văn Mậu, Nguyên Phó Chủ tịch Hội Toán họcViệt Nam thiết thực để khuyến khích, cổ vũ, động viên sự say mê học tập và ứng dụng Toán học của sinh viên các trường đại học và cao đẳng, nhằm phát hiện và bồi dưỡng những năng khiếu Toán học trẻ, góp phần đào tạo nên đội ngũ cán bộ kế cận để phục vụ việc nghiên cứu, giảng dạy và ứng dụng Toán học trong khối các trường đại học và cao đẳng. Thông qua nội dung hoạt động chuyên môn của các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên, các trường đại học và cao đẳng trong cả nước có điều kiện xem xét lại chương trình đào tạo, tổ chức các hội thảo khoa học chuyên đề tương ứng về giảng dạy và ứng dụng Toán học. Các hoạt động của các hội thảo về đào tạo và semina khoa học song song với các kỳ Olympic toán sinh viên là rất thiết thực và thực sự cần thiết. Chúng ta cũng cần đầu tư thêm, để có nội dung sinh hoạt phù hợp hơn và có đề dẫn chuyên môn sát với nhu cầu thực tiễn thì sẽ giúp cho các thầy giáo, cô giáo trẻ tự tin trong bước đường giảng dạy và nghiên cứu Toán học, giúp họ ngày càng có thêm những ứng dụng Toán học, thiết thực hơn trong hoạt động thực tiễn phong phú của nền kinh tế đất nước trong thời kỳ chủ động hội nhập sâu và rộng ở tầm cao quốc tế. Trải qua 19 năm, thông qua các kỳ thi Olympic Toán học sinh viên toàn quốc, các trường đại học và cao đẳng trong cả nước đã có thêm nhiều cơ hội để trao đổi, chia sẻ nhiều kiến thức bổ ích và kinh nghiệm trong hoạt động thực tiễn về hoạt động đào tạo và nghiên cứu khoa học nói chung, trong lĩnh vực giảng dạy và bồi dưỡng tài năng Toán học nói riêng. Có được sự thành công rực rỡ của các kỳ Olympic Toán học xuyên suốt những năm qua, trước hết là nhờ vào sự học tập chuyên cần, sự say mê Toán học của đông đảo sinh viên, nhờ vào sự tận tâm của lớp lớp các thầy, các cô trên giảng đường đại học. Có nhiều trường đại học ở những nơi rất khó khăn, xa xôi, từ địa đầu biên giới phía bắc Tổ quốc (như Cao đẳng Sơn La, ...) đến các trường ở Tây Nguyên (như trường CĐSP Tây Ninh, ...), các trường ở tận cùng phía nam (như trường Đại học An Giang, Đồng Tháp, Cần Thơ, ...), từ các trường công lập đến các trường dân lập, các trường cơ bản, kỹ thuật đến các trường văn hoá nghệ thuật, ... Điều đó minh chứng sự lớn mạnh không ngừng của phong trào, sức hấp dẫn đặc biệt của Olympic toán học, nó thể hiện sự quan tâm của các trường, các khoa, bộ môn Toán trong cả nước... Vậy nên trách nhiệm của Hội Toán học Việt Nam, những người tổ chức các kỳ Olympic phải giữ được ngọn lửa Olympic mãi mãi cháy sáng, như ngọn đuốc soi đường nâng bước cho những trái tim khối óc đang khát vọng cống hiến được nâng bước đi lên bay cao và bay xa theo suốt chặng đường dài cùng thời đại mới...

Cũng cần nhấn mạnh rằng, gắn với các kỳ Olympic Toán học sinh viên toàn quốc ở Việt Nam còn có những sự kiện Olympic quan trọng khác. Trước đó, đã 49 năm, nước ta tham gia thi thi Olympic Toán quốc tế (IMO) trong chương trình toán cấp trung học phổ thông. Chúng ta còn nhớ mãi những hình ảnh không thể nào quên ở năm học 1973 - 1974, dù đã qua một phần ba thế kỷ, năm học đầu tiên các Khối chuyên toán tập trung cao độ cho việc chuẩn bị tham dự kỳ thi Olympic Toán quốc tế. Chúng ta hồi hộp và chờ đợi các học sinh thân yêu của mình đi xa, không phải đi ra chiến trường, mà là đi dự thi Olympic Toán quốc tế. Kết quả huy chương vàng của em Hoàng Lê Minh và đồng đội đã cho chúng ta niềm tin, cổ vũ các thế hệ học sinh tiếp theo vững bước đi lên trên tầm cao mới. Từ đó, năm học nào nước ta cũng có đội tuyển mạnh, thầy và trò trưởng thành qua từng năm tháng. Kỳ thi Olympic Toán học sinh viên toàn quốc của nước ta được tổ chức lần đầu tiên vào năm 1993.

Ngay năm sau đó, năm 1994, kỳ thi Olympic Toán học sinh viên quốc tế (International Mathematical Competitions for university students (IMCS)) ra đời. Nhưng mãi đến năm 2008, tức là sau 14 năm, chúng ta mới có đoàn sinh viên lần đầu tiên tham dự, đó là đội tuyển gồm các sinh viên của Hệ Đào tạo Cử nhân Khoa học Tài năng của trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQGHN. Ngay lần đầu ra quân, sinh viên Việt Nam đã gặt hái thành công. Em Hoàng Mạnh Hùng đạt huy chương vàng Olympic. Qua ba kỳ tham dự Olympic Toán học sinh viên quốc tế, chúng ta cũng đã khẳng định chất lượng giáo dục và đào tạo Toán học mũi nhọn bậc đại học ở nước ta không quá tụt hậu so với các nước trong khu vực (đội tuyển nước ta đã 2 lần đứng trong tốp 20 trong số gần 100 đội tuyển của các trường đại học trên thê giới tham dự). Tất nhiên, các kết quả này vẫn còn khoảng cách xa so với bề dày thành tích của học sinh phổ thông tham dự các kỳ thi IMO. Các sinh viên tham dự IMC phải am hiểu sâu sắc nhiều lĩnh vực của toán học như Giải tích thực và phức, đại số, hình học giải tích, toán rời rạc, lý thuyết trò chơi,... và phải tự trình bày lời giải bằng tiếng Anh nữa... Vậy là năm tới đây, năm 2013, chúng ta sẽ có thêm nhiều chương trình hoạt động ý nghĩa trong cộng đồng toán học kỷ niệm truyền thống Olympic IMO và IMC, gắn với các kỳ Olympic Toán học sinh viên.

Năm nay, chúng ta tổ chức kỷ niệm 30 năm các kỳ Olympic Toán học sinh viên tại Đại học SP Huế, một trường đại học có truyền thống đào tạo các giáo viên tài năng cho đất nước. Chắc chắn rằng kỳ thi Olympic Toán học luôn ghi dấu ấn đậm nét trong mỗi cán bộ, giảng viên, sinh viên các trường đại học và cao đẳng vì trên vai mỗi người là sứ mệnh, là trách nhiệm hết sức nặng nề và mới mẻ trước một thách thức to lớn là rất tự tin tham gia kỳ Olympic tầm cỡ quốc gia với sự tham gia của hàng trăm trường đại học và cao đẳng, hàng nghìn sinh viên Toán học tài năng tới đây để hội ngộ, học hỏi và tham dự thi Olympic Toán, thể hiện những hoài bão, ước mơ, khát vọng sáng tạo. Đây cũng là một cơ hội to lớn để các cán bộ giảng dạy, các nhà quản lý giáo dục từ khắp miền - vùng trong cả nước gặp gỡ, trao đổi, giao lưu và chia sẻ kinh nghiệm trong giảng dạy cũng như bồi dưỡng tài năng trẻ Toán học cho tương lai.

Nhìn lại chặng 30 năm đã đi qua, tuy không dài, song chúng ta càng thấy thật tự hào hơn về những thành công và kết quả Olympic Toán học sinh viên đã đạt được. Nhiều thế hệ thầy giáo, cô giáo đã trưởng thành, tự tin chủ động hội nhập, ngày đêm tận tâm tận lực với sự nghiệp giáo dục, đào tạo, hết mình vì lớp lớp học trò thân yêu, đã nỗ lực đổi mới chương trình, giáo trình đại học, phương pháp giảng dạy, phát huy tính tích cực, chủ động sáng tạo của sinh viên, đổi mới quản lý, khắc phục các mặt hạn chế, yếu kém, chuyển biến mạnh mẽ, phấn đấu đảm bảo chất lượng giáo dục và đào tạo, đáp ứng ngày càng tốt hơn yêu cầu phát triển kinh tế xã hội và phục vụ sự nghiệp công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước.

Nhân dịp hội thảo liên kết giữa Trường Đại học Đồng Tháp và Hội Toán học Hà Nội, xin gửi tới ban lãnh đạo nhà trường, các thầy, cô và các sinh viên Nhà trường đạt nhiều thành tích xuất sắc trong đào tạo, nghiên cứu triển khai, chúc nhà trường phát triển nhanh, mạnh, bền vững trên tầm cao mới.

Hà Nội - Đồng Tháp 10/2023

HOẠT ĐỘNG OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN TRONG TRƯỜNG ĐẠI HỌC ĐỒNG THÁP

Nguyễn Trung Hiếu*
Nguyễn Văn Dũng†
Trần Lê Nam‡

Tóm tắt nội dung

Trong bài viết này, chúng tôi trình bày một số kết quả đạt được và hạn chế của hoạt động Olympic Toán Sinh viên tại Trường Đại học Đồng Tháp. Đồng thời, chúng tôi cũng đề xuất một số định hướng để phát triển hoạt động này trong thời gian tới.

1 Tổng quan về Kì thi Olympic Toán sinh viên và học sinh toàn quốc

Kì thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc là một sáng kiến của Hội Toán học Việt Nam, được tổ chức đầu tiên vào năm 1993 tại Trường Đại học Tổng hợp Hà Nội (nay là Trường Đại học Khoa học Tự nhiên - Đại học Quốc gia Hà Nội) với sự góp mặt của ba trường đại học: Đại học Bách khoa Hà Nội, Đại học Sư phạm Hà Nội và Đại học Tổng hợp Hà Nội. Kể từ đó, hàng năm, Hội Toán học Việt Nam phối hợp với một trường đại học, Bộ Giáo dục và Đào tạo, Liên hiệp các hội khoa học và kĩ thuật Việt Nam và Trung ương Hội sinh viên Việt Nam để tổ chức Kì thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc. Từ năm 2017, Hội Toán học Việt Nam đã phối hợp với Trường Đại học Phú Yên tổ chức Kỳ thi Olympic Toán sinh viên và học sinh, bao gồm phần thi Olympic Toán dành cho sinh viên các trường cao đẳng, đại học và học viện trên toàn quốc và phần thi Olympic Toán dành cho học sinh các trung học phổ thông (THPT) chuyên trên toàn quốc. Đối với phần thi Olympic Toán dành cho sinh viên, Kỳ thi tổ chức thi hai môn độc lập, gồm Đại số và Giải tích. Mỗi sinh viên có thể dự thi một hoặc cả hai môn. Mỗi đội tuyển có tối đa 5 sinh viên cho mỗi môn thi. Đối với phần thi dành cho học sinh THPT chuyên, mỗi trường THPT chuyên cử đội tuyển bao gồm không quá 10 học sinh của trường. Các học sinh làm hai bài thi trong hai buổi, mỗi bài 180 phút.

Mục đích của kì thi là góp phần nâng cao chất lượng dạy và học toán, thúc đẩy phong trào học toán trong học sinh, sinh viên; phát hiện, bồi dưỡng các sinh viên giỏi toán trong các trường đại học, cao đẳng và học viện; thúc đẩy niềm say mê toán học trong học sinh

*Trường Đại học Đồng Tháp
†Trường Đại học Đồng Tháp
‡Trường Đại học Đồng Tháp

khối Trung học phổ thông chuyên; phát hiện, bồi dưỡng học sinh giỏi toán cũng như tạo cơ hội giao lưu giữa các học sinh giỏi toán khối THPT chuyên với các sinh viên và giảng viên toán tại các trường đại học, cao đẳng và học viện. Tham gia kì thi, sinh viên và học sinh có cơ hội khẳng định tài năng về toán học của mình, đồng thời sinh viên và học sinh cũng có cơ hội giao lưu với các nhà toán học, sinh viên giỏi toán của nhiều trường đại học và cao đẳng trong toàn quốc về phương pháp học toán, về nghiên cứu toán [1].

Những năm gần đây, kỳ thi đã thu hút nhiều sinh viên, học sinh tham dự và đã trở thành một trong những hoạt động nhận được sự quan tâm sâu rộng của tất cả các trường đại học, học viện, trường cao đẳng và trường THPT chuyên trên toàn quốc. Trường Đại học Đồng Tháp tham gia kì thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc lần đầu tiên vào năm 2005. Kể từ đó, hoạt động Olympic Toán sinh viên được lãnh đạo Trường Đại học Đồng Tháp, Khoa Sư phạm Toán - Tin (trước đây là Khoa Toán học) xem như là hoạt động thường niên.

2 Thực trạng hoạt động Olympic Toán sinh viên tại Trường Đại học Đồng Tháp

2.1 Hoạt động Olympic Toán sinh viên tại Trường Đại học Đồng Tháp

Hàng năm, nhằm chuẩn bị cho việc thành lập đội tuyển Olympic Toán sinh viên Trường Đại học Đồng Tháp tham dự kì thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc, Khoa Sư phạm Toán - Tin tổ chức kì thi Olympic Toán sinh viên cấp trường. Đối tượng tham dự là tất cả sinh viên hệ chính quy của Trường Đại học Đồng Tháp. Kì thi tổ chức hai môn độc lập là Đại số và Giải tích với những kiến thức toán trong chương trình các học phần về Toán cao cấp. Trước kì thi vòng trường, Khoa tổ chức cho sinh viên đăng kí tham gia và tổ chức ôn tập theo từng môn. Mặc dù với kế hoạch tổ chức kì thi Olympic Toán sinh viên vòng trường nghiêm túc nhưng số lượng sinh viên tham gia rất hạn chế, chủ yếu là sinh viên ngành Đại học Sư phạm Toán học, sinh viên các ngành khác không tham gia. Bên cạnh số lượng sinh viên tham gia hạn chế, kết quả của kì thi cũng chưa cao. Đa số sinh viên chỉ đạt được giải Ba và giải Khuyến khích, số lượng sinh viên đạt các giải cao rất hạn chế.

Sau kì thi Olympic Toán sinh viên cấp Trường, Khoa tổ chức tuyển chọn những sinh viên có kết quả cao vào đội tuyển Olympic Toán sinh viên của Trường. Số lượng thành viên của đội tuyển không quá 10 sinh viên với không quá 5 sinh viên mỗi môn. Đồng thời, Khoa cử các giảng viên có kinh nghiệm tham gia ôn tập, bồi dưỡng cho đội tuyển cho đến khi đội tuyển tham gia kì thi cấp toàn quốc. Trong những năm gần đây, thành tích của đội tuyển Olympic Toán sinh viên Trường Đại học Đồng Tháp luôn đạt được những kết quả tốt, thành tích năm sau cao hơn năm trước.

Năm	Giải Nhất	Giải Nhì	Giải Ba	Giải KK	Tổng cộng
2005	0	0	2	2	4
2006	0	0	1	4	5
2007	0	0	3	1	4
2008	0	1	4	2	7
2009	0	0	2	0	2
2010	0	1	1	0	2
2011	0	0	2	0	2
2012	0	1	3	1	5
2013	0	1	2	2	5
2014	0	0	5	1	6
2015	2	1	2	2	7
2016	0	0	4	0	4
2019	2	1	3	1	7
2022	1	3	2	2	8
2023	1	3	5	0	9
Tổng cộng	6	12	41	18	77

Kết quả đạt được của đội tuyển trong những năm gần đây là kết quả của quá trình chuẩn bị ôn luyện nghiêm túc, quyết tâm cao của thầy và trò Khoa Sư phạm Toán - Tin, sự quan tâm của lãnh đạo Trường Đại học Đồng Tháp và sự đồng hành tài trợ các công ty, doanh nghiệp. Đồng thời, thành tích đạt được của đội tuyển Olympic Toán sinh viên qua 15 lần tham dự các Kì thi toàn quốc từ năm 2005 đến năm 2023 (năm 2017, năm 2018, Trường Đại học Đồng Tháp không tham dự; năm 2020 và năm 2021, Kỳ thi không được tổ chức do dịch bệnh Covid 19) đã khẳng định chất lượng đào tạo của Khoa Sư phạm Toán-Tin ngày càng nâng cao.

Để động viên sinh viên tham gia đội tuyển Olympic Toán sinh viên toàn quốc, Khoa đã ban hành quy định khen thưởng sinh viên đạt giải trong kì thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc. Đối với sinh viên đạt giải trong kì thi cấp toàn quốc, bên cạnh những phần thưởng của Ban tổ chức kì thi thì Nhà trường và Khoa cũng có những phần thưởng tương ứng với thành tích đạt được. Hơn nữa, kể từ năm học 2013 - 2014, sinh viên cũng được miễn thi một môn học chuyên ngành ở học kì đó và nhận được điểm số phụ thuộc thành tích của các em, cụ thể đối với giải Nhất và giải Nhì được 10 điểm, giải Ba được 9,5 điểm, giải Khuyến khích được 9,0 điểm, đối với sinh viên không đạt giải được 8,0 điểm [2]; còn trong những năm trước, sinh viên chỉ được nhận mức điểm tương ứng như trên cho phần điểm kiểm tra thường kì.

2.2 Thuận lợi và khó khăn của hoạt động Olympic Toán sinh viên tại Trường Đại học Đồng Tháp

Hoạt động Olympic Toán sinh viên tại Trường Đại học Đồng Tháp có những thuận lợi sau:

- Hoạt động Olympic Toán sinh viên luôn nhận được sự quan tâm chỉ đạo sâu sát của lãnh đạo Trường Đại học Đồng Tháp, lãnh đạo Khoa Sư phạm Toán - Tin. Chủ trương của Khoa khẳng định phong trào Olympic Toán sinh viên là một trong những hoạt động trọng tâm của Khoa.

- Trường Đại học Đồng Tháp có số lượng sinh viên ngành Sư phạm Toán học với khoảng 400 sinh viên. Đây là một lực lượng thí sinh đông đảo và cũng là nguồn lực lớn cho việc lựa chọn thành lập đội tuyển Olympic Toán sinh viên của Trường.

- Khoa Sư phạm Toán-Tin có nhiều giảng viên có kinh nghiệm, nhiệt tình và tâm huyết trong công tác Olympic Toán sinh viên.

Tuy nhiên, hoạt động Olympic Toán sinh viên tại Trường Đại học Đồng Tháp cũng có những khó khăn sau:

- Trong những năm trước đây, chất lượng đầu vào của sinh viên Trường Đại học Đồng Tháp chỉ đạt mức trung bình so với toàn quốc. Kiến thức và tư duy toán học cơ bản của sinh viên có nhiều hạn chế. Trong khi đó, đề thi Olympic Toán sinh viên đòi hỏi khả năng tư duy, suy luận của thí sinh rất cao nên sinh viên gặp nhiều khó khăn trong ôn tập và tham gia Kỳ thi.

- Vì năng lực toán học hạn chế nên một bộ phận không nhỏ sinh viên có tâm lí e ngại với từ "Olympic"; từ đó, sinh viên không mạnh dạn tham gia kì thi Olympic Toán sinh viên cấp trường.

- Việc ôn tập và tham gia thi Olympic Toán sinh viên tốn nhiều thời gian và công sức. Vì vậy, đa số sinh viên ngành Toán học không quan tâm đến hoạt động phong trào Olympic Toán sinh viên mà chỉ quan tâm đến việc học trên lớp.

- Chế độ cho sinh viên và giảng viên tham gia Olympic toán chưa cao Trong những năm trước đây, mức thưởng cho sinh viên đạt giải trong kì thi cấp Trường và toàn quốc chưa cao. Do đó, chỉ những sinh viên có sự đam mê toán học thì mới nhiệt tình tham gia kì thi.

- Việc tham gia ôn tập trong đội tuyển Olympic tốn nhiều thời gian và công sức. Việc bồi dưỡng cho sinh viên trong khi tham gia ôn tập trong đội tuyển chưa có. Chế độ cho giảng viên tham gia bồi dưỡng đội tuyển còn khiêm tốn, trong khi đó, giảng viên phải mất nhiều thời gian và công sức cho việc tìm kiếm tài liệu phụ vục công tác bồi dưỡng đội tuyển.

3 Định hướng phát triển hoạt động Olympic Toán sinh viên tại Trường Đại học Đồng Tháp

Trên cơ sở thực trạng, những thuận lợi và hạn chế của hoạt động Olympic Toán sinh viên trong những năm vừa qua, chúng tôi đề xuất một số định hướng để góp phần nâng cao chất lượng hoạt động Olympic Toán sinh viên Trường Đại học Đồng Tháp như sau.

3.1 Tiếp tục duy trì và tăng cường sự quan tâm, chỉ đạo của Nhà trường và Khoa Sư phạm Toán - Tin đối với hoạt động Olympic Toán sinh viên

- Tiếp tục xác định hoạt động Olympic Toán sinh viên là một trong những hoạt động trọng tâm của mỗi năm học. Từ đó, cụ thể hóa hoạt động Olympic Toán sinh viên vào kế hoạch hoạt động hàng năm của Nhà trường và Khoa Sư phạm Toán - Tin.

- Lãnh đạo Khoa Sư phạm Toán - Tin cần thường xuyên chỉ đạo, kiểm tra và đôn đốc việc thực hiện hoạt động Olympic Toán sinh viên.

3.2 Nâng cao số lượng và chất lượng sinh viên tham gia Olympic Toán sinh viên

- Tăng cường phối hợp với các Khoa và bộ phận có liên quan để tuyên truyền mục đích, ý nghĩa và lợi ích của Kì thi Olympic Toán sinh viên đến tất cả các sinh viên trong Trường Đại học Đồng Tháp.
- Khoa Sư phạm Toán - Tin cần bắt buộc tất cả sinh viên ngành Sư phạm Toán học có thành tích học tập khá trở lên tham gia kì thi Olympic Toán sinh viên cấp Trường. Khoa và bộ môn cần đa dạng hóa các hình thức tổ chức ôn tập, tổ chức Kỳ thi để thu hút nhiều sinh viên tham gia.
- Những giảng viên tham gia công tác Olympic Toán sinh viên nên đầu tư nhiều hơn nữa cho việc nghiên cứu, tìm kiếm tài liệu phục vụ công tác ôn tập. Tăng cường báo cáo chuyên đề liên quan đến Olympic Toán sinh viên.

3.3 Có cơ chế xứng đáng cho hoạt động Olympic Toán sinh viên

- Có chế độ bồi dưỡng cho sinh viên trong đội tuyển tham gia ôn tập tham dự Kỳ thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc. Đối với giảng viên tham gia bồi dưỡng đội tuyển, Nhà trường cần có chế độ bồi dưỡng xứng đáng với sức lao động của giảng viên như tăng đơn giá tiết dạy Olympic so với tiết dạy bình thường và tính giờ nghiên cứu khoa học. Tiếp tục duy trì và nâng cao chế độ khen thưởng cho giảng viên hướng dẫn và sinh viên đạt giải trong Kỳ thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc.
- Đối với những sinh viên có thành tích cao trong kì thi toàn quốc, Nhà trường cần có những ưu tiên như xét học bổng, xét điểm thưởng trong điểm rèn luyện, ưu tiên trong tuyển dụng giảng viên,... Vì những lớp sinh viên năm cuối chủ yếu thực tập (không có học) nên bên cạnh việc miễn thi một môn chuyên ngành Toán (gần môn tham gia thi Olympic) trong cùng học kì bắt đầu thực hiện năm 2013 - 2014, Nhà trường và Khoa có thể cho sinh viên đổi điểm đối với một môn Toán của học kì bất kì trong chương trình đào tạo.

4 Kết luận

Hoạt động Olympic Toán sinh viên là một trong những hoạt động trọng tâm góp phần khẳng định thương hiệu của Khoa và Nhà trường. Chính vì vậy, cần có những định hướng và giải pháp để nâng cao chất lượng hoạt động này. Với những giải pháp được trình bày trong bài viết này, chúng tôi hi vọng chất lượng của sinh viên tham gia kì thi cấp Trường cũng như thành tích của đội tuyển Olympic Toán sinh viên trong những năm tới đạt kết quả tốt hơn nữa.

Tài liệu

[1] https://www.vms.org.vn/category/olympic-toan-sinh-vien

[2] Khoa Sư phạm Toán - Tin, Đề nghị số 47/ĐN-SPTT ngày 05/11/2013 về việc miễn thi học phần đối với sinh viên dự thi Olympic Toán, Tin cấp toàn quốc.

ĐỊNH LÝ PYTHAGORE VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN

Trần Hùng Thao
Viện Toán học

Tóm tắt nội dung

Bài viết giới thiệu ngắn gọn về Pythagoras, định lý và một số vấn đề liên quan.

1 Vài nét tiểu sử

Py-ta-go (Pythagoras, 570-495 TCN) là một nhà triết học Hy Lạp cổ đại, đã có công sáng lập học phái Pythagoras. Những bài giảng của ông về chính trị và tôn giáo dã từng một thuở rất có tiếng tăm và đã gây ảnh hưởng đến các triết gia lỗi lạc như Platon, Aristote sau này. Và cũng chính qua những vị này mà ảnh hưởng đến triết học phương Tây nói chung. Ông chủ trương học thuyết về "Sự luân hồi của linh hồn". Theo đó, ông cho rằng linh hồn là thứ bất tử, sau khi chết đi, sẽ nhập vào cơ thể khác. Về khoa học, ông đề xướng một lý thuyết cho rằng các hành tinh di chuyển theo quy luật của các phương trình toán học và tạo nên bản nhạc hòa tấu mà ta không thể nghe thấy. Người ta cũng cho rằng chính Py-ta-go và các học trò đã phát triển bước đầu lý thuyết số học và âm nhạc (nhạc lý).

Dưới đây, ta sẽ dùng cách viết tên Pythagore thay cho Py-ta-go hoặc Pythagoras

2 Định lý Pythagore

Bài toán 1. *Trong một tam giác vuông, gọi độ dài của 2 cạnh góc vuông là a và b, độ dài cạnh huyền là c, thì ta có hệ thức* $a^2 + b^2 = c^2$.

Định lý này đã được biết đến từ lâu trước thời Pythagoras, nhưng ông được coi là người đầu tiên nêu ra chứng minh định lý này. Cách chứng minh của ông rất đơn giản, chỉ bằng cách sắp xếp lại hình vẽ.

Định lý này có thể coi là định lý có nhiều cách chứng minh nhất. Trong cuốn sách *The Pythagorean Proposition (Mike Staring - 1996)* nêu ra 370 cách chứng minh cho định lý Pythagore.

• **Bộ ba số Pythagore**.

Một bộ ba số Pythagore là ba số nguyên dương (a, b, c) sao cho $a^2 + b^2 = c^2$.

Nói cách khác, bộ ba số Pythagore biểu diện độ dài của các cạnh của một tam giác vuông mà cả ba độ dài này là những số nguyên dương.

Các chứng cứ khảo cổ ở miền bắc châu Âu cho thấy người cổ đại đã biết đến những bộ ba này và có những văn tự ghi chép lại. Các bộ ba này thường được viết là (a, b, c). Một số bộ hay gặp là $(3, 4, 5)$ và $(5, 12, 13)$.

Một bộ ba số Pythagore gọi là bộ ba số Pythagore nguyên thủy khi các số (a, b, c) nguyên tố cùng nhau (hay ước số chung lớn nhất của (a, b, c) bằng 1).

Dưới đây liệt kê các bộ ba số Pythagore nguyên thủy nhỏ hơn 100 (16 bộ số):

$$(3,4,5), (5,12,13), (7,24,25), (8,15,17), (9,40,41), (11,60,61),$$
$$(12,35,37), (13,84,85), (16,63,65), (20,21,29), (28,45,53),$$
$$(33,56,65), (36,77,85), (39,80,89), (48,55,73), (65,72,97).$$

Có một cách tạo ra bộ ba số Pythagore khá thú vị như sau: Lấy một số nguyên dương lẻ, bình phương nó lên, được một số nguyên dương lẻ, chia số đó thành hai số, một số chẵn và một số lẻ, hơn kém nhau nhau 1 đơn vị, thế là sẽ được một bộ ba số Pythagore.

Bởi vì $(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1$, chia thành 2 số là $(2n^2 + 2n)$ và $(2n^2 + 2n + 1)$. Thay vào định lý Pythagore thì

$$(2n+1)^2 + (2n^2+2n)^2 = 4n^4 + 8n^3 + 8n^2 + 1 = (2n^2 + 2n + 1)^2$$

Chẳng hạn với $n = 3$ ta có bộ ba $(3, 4, 5)$, với $n = 5$ ta có bộ ba $(5, 12, 13)$,...

3 Định lý Pythagore trong Thống kê

.

Cho X và Y là 2 biến ngẫu nhiên độc lập.

Ký hiệu $\sigma(X)$ là độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên X, $\sigma(Y)$ là độ lệch chuẩn của biến ngẫu nhiên Y, $\sigma(X+Y)$ là độ lệch chuẩn của $X+Y$, $\sigma(X-Y)$ là độ lệch chuẩn của $X-Y$.

Khi đó ta có: $a^2 + b^2 = c^2$, với $a = \sigma(X), b = \sigma(Y), c = \sigma(X+Y)$ hoặc $\sigma(X-Y)$.

Tức là: $\sigma^2(X) + \sigma^2(Y) = \sigma^2(X+Y)$. Đó là định lý Pythagore trong Thống kê.

• **Bình phương của độ lệch chuẩn (tức σ^2) gọi là phương sai**.

Khi đó Định lý Pythagore Thống kê phát biểu là: Phương sai của một tổng hai biến ngẫu nhiên độc lập bằng tổng của các phương sai từng biến.

Phương sai cũng ký hiệu là *Var* (bởi chữ Variance).

Vậy với hai biến ngẫu nhiên X và Y độc lập thì ta có

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Hệ thức trên có thể mở rộng như sau:

Cho $X_1, X_2, ..., X_n$ là n biến ngẫu nhiên độc lập. Khi đó ta có

$$\sigma^2(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \cdots + \sigma^2(X_n)$$

hay là

$$Var(X_1 + X_2 + \cdots X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n)$$

• **Thí dụ . Một trò chơi của câu lạc bộ sinh viên**.

Một câu lạc bộ sinh viên đặt ra một trò chơi như sau vào mỗi tối thứ bảy cuối tuần:

Mỗi người chơi tung 2 con xúc sắc, được 2 con số, chẳng hạn $3, 5$ thì được mua một cái bánh nướng với giá 35.000 đồng, ký hiệu tắt là $35K$ (đương nhiên giá bánh nướng cao nhất chỉ là 66.000 đồng tức $66K$ và thấp nhất là 11.000 đồng tức $11K$).

Ban Quản lý câu lạc bộ cho biết, qua thống kê thấy rằng giá bánh trung bình đã thực hiện là $47K$ với độ lệch tiêu chuẩn là $0,15K$. Một sinh viên mỗi tuần mua bánh một lần với giá xác định bằng cách gieo 2 xúc sắc và mua liền trong 30 tuần liên tiếp.

Hãy tìm xác suất để cho anh ta phải chi trả quá số tiền 1.500.000 đồng cho việc mua bánh ấy. Số tiền mua bánh là một số ngẫu nhiên với giả thử tuân theo phân phối chuẩn.

Lời giải.

- Đầu tiên tính số tiền phải trả tổng cộng là $T = X_1 + X_2 + \cdots + X_{30}$,

trong đó $X_i (i = 1, 2, \cdots, 30)$ là số tiền ngẫu nhiên mua bánh ở tuần thứ i.

- Rồi tính tổng số tiền trung bình phải trả là

$$E(T) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_{30}) = 47 + 47 + \cdots + 47 = 1.410K$$

- Rồi áp dụng định lý Pythagore trong Thống kê:

$$Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_{30}) = (0,15)^2 + (0,15)^2 + \cdots + (0,15)^2 = 6,750K$$

và $\sigma(X_1 + X_2 + \cdots + X_{30}) = 0,822$.

Mà T là biến ngẫu nhiên có phân phối chuẩn là $N(1410; 0,822)$.

- Vậy với xác suất người sinh viên không phải chi quá 1.500.000 đồng cho 30 tuần mua bánh là $P(T > 1500K) = 1 - P(T \leq 1500K) = 1 - 0,87 = 0,13$.

Vậy với xác suất không lớn lắm, khoảng 13%, người sinh viên đó mới phải chi phí quá 1.500.000 đồng để mua bánh.

4 Tổng của của các bình phương của hai biến ngẫu nhiên độc lập có phân phối chuẩn

Giả sử $a = X_1$ và $b = X_2$ là 2 biến ngẫu nhiên phân phối chuẩn $N(0, 1)$ và độc lập.

Khi đó tổng $a^2 + b^2$ là một biến ngẫu nhiên ký hiêu χ^2 (đọc là Khi-bình phương):

$(X_1)^2 + (X_2)^2 = \chi^2$.

Phân phối của χ^2 được gọi là phân phối của Khi-bình phương và ký hiệu là χ^2.

Người ta lập ra một bảng các giá trị của χ^2 để tra cứu.

Phân phối Khi-bình phương thường dung để kiểm định tính độc lập hoặc phụ thuộc của 2 sự kiện.

Thí dụ: Phân phối Khi-bình phương thường được dùng để kiểm định định sự phù hợp (Goodness of fit) của 1 tần số quan sát trên mẫu, so sánh với tần số lý thuyết.

Thi dụ: Tần số lý thuyết (hay tần số mong đợi) sinh trai hoặc gái là 50%. Quan sát một mẫu: Số trẻ em sinh tại khoa Sản trong 1 tuần lễ gồm 110 trẻ trai và 90 trẻ gái (tần số quan sát).

Như vậy có thể kết luận hiện nay có khuynh hướng sinh trai nhiều hơn gái?

Giả thuyết H_0: Tần số (TS) quan sát = Tần số (TS) lý thuyết

Giả thuyết H_a: Có khác biệt $\chi^2 = \dfrac{(\text{TS quan sát - TS mong đợi})^2}{\text{TS mong đợi}}$

$$= \frac{(110-100)^2 + (90-100)^2}{100} = 2.$$

Xem bảng phân phối χ^2 với bậc tự do $DF = 1$, với giá trị tới hạn $\alpha = 0,05$ thì là $3,84$. Như thế ở đây $\chi^2 = 2 < 3,84$.

Vậy ta chấp nhận H_0 tức là có thể kết luận rằng trường hợp này thì: *Sinh trai nhiều hơn gái là do tình cờ vì sự khác biệt chưa có ý nghĩa thống kê.*

5 Kết luận

Định lý Pythagore có nhiều ứng dụng trong đời sống. Gần đây nhất, người ta thấy nó còn ứng dụng trong nghiên cứu về tài chính, phân tích xu hướng phát triển của giá chứng khoán trong một số trường hợp.

Về con người Pythagore, ông là một nhà triết học kiêm khoa học của Hy Lạp cổ đại, có công đóng góp cho nền tảng của triết học ở châu Âu. Tuy ông chủ trương cuộc sống khổ hạnh, nhưng chúng ta cũng có thể rút ra được từ ông những tư tưởng đạo đức tốt.

Ông đã từng nói: *"Phải chiến đấu chống lại ba điều sau đây: Bệnh tật của cơ thể, Sự ngu dốt của trí óc và Sự dục vọng của lòng người"*.

• TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Trang Wikipedia về Pythagoras.

[2]. Trang KHS AP Stats về Pythagorean Theorem of Statistics.

[3]. Trang web https://bvag.com.vn/wp-content/uploads/2013/01/k2 attachments về Phân phối Khi-bình phương.

[4]. M.S. Evans and J.S. Rosenthal, *Probability and Statistics*,(2004).

THUẬT TOÁN ĐA THỨC GIẢI HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH TUYẾN TÍNH & MỞ RỘNG

Trần Vũ Thiệu
Viện Toán học

Tóm tắt nội dung

Bài viết **giới thiệu vắn tắt thuật toán Khachian -** thuật toán **đa thức đầu tiên** giải hệ bất phương trình tuyến tính, quy hoạch tuyến tính **(q.h.t.t.)**. Tuy **chưa phải** là thuật toán tốt nhất, song đó là **sự kiện lớn** trong lý thuyết q.h.t.t. thế kỷ XX, mở ra nhiều **nghiên cứu mới, hiệu quả hơn về thuật toán đa thức.** Trong bài nêu một số hình vẽ minh họa, giúp hiểu rõ hơn nội dung trình bày.

1 Hệ bất phương trình tuyến tính trong $\mathbb{R}^n$

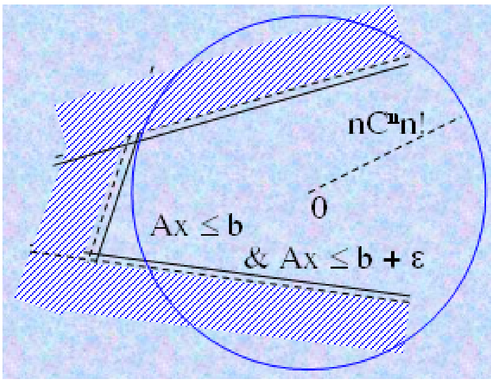
• Xét hệ $m \geq 2$ bất phương trình tuyến tính n biến với các **hệ số nguyên:**

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m. \quad (a_{ij} \in \mathbb{Z}, b_i \in \mathbb{Z}, x_j \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

Đặt $\quad \mathbf{C} \geq \max_{i,j}(|a_{ij}|, |b_i|)$.

Hệ nhiễu: $\quad a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i + \epsilon, i = 1, 2, \ldots, m. \quad (2)$

với $\quad \epsilon = 1/(6nC^n n!)$.



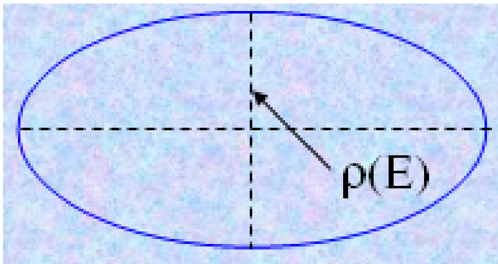
Tiếp theo nêu các bổ đề làm cơ sở lý thuyết cho thuật toán Khachian (chứng minh có thể xem ở tài liệu tham khảo [2]).

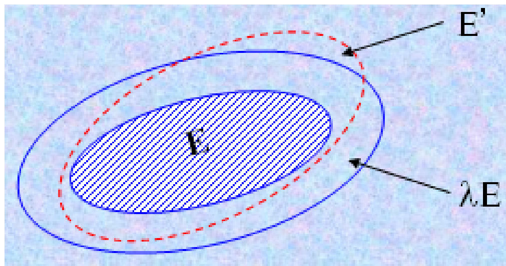
• **Bổ đề 1.** Nếu hệ (1) có nghiệm thì phải có nghiệm trong hình cầu tâm O bán kính $nC^n n!$ □

• **Bổ đề 2.** Hệ (2) có nghiệm khi và chỉ khi hệ (1) có nghiệm. □

2 Kỹ huật Elipsoit

• Cho Elipsoit **E** = $\{$**y** $\in \mathbb{R}^n$: **y = x + Qz,** $\|$**z**$\| \leq 1\}$ với **x** $\in \mathbb{R}^n$ là **tâm, Q** vuông cấp n. Ký hiệu **E = E(x, Q).**





Elipsoit **E = E(x. Q)** gọi là **không suy biến** nếu det **Q** $\neq 0$.

Bề dày ρ**(E) =** $\min_{\|z\|=1} \|$**Q**$z\|$ **> 0** khi det **Q** $\neq$ **0.**

$$\mathbf{E = E(x, Q)} \Rightarrow \lambda\mathbf{E = (x,} \lambda\mathbf{Q)}\ (\lambda > 1)$$

E = E(x, Q), E′ = E(x′, Q′). Ta nói **E′** là δ- **xâp xỉ E** nếu

$$\|\mathbf{x - x'}\| + \|\mathbf{Q - Q'}\| \leq \delta.$$

• **Bổ đề 3** (Elipsoit xấp xỉ bọc có thể tích nhỏ):

Nếu **E′** là $\delta-$ **xấp xỉ** của λ**E** $(\mathbf{1} \leq \lambda \leq \mathbf{2})$,

$$\delta \leq (\lambda - 1)\rho(\mathbf{E})$$

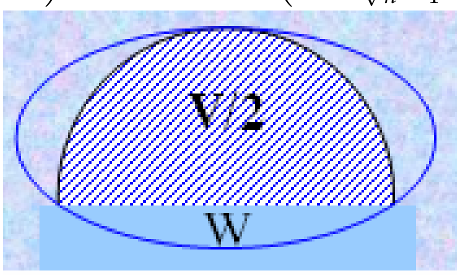
thì **E′** hoàn toàn chưa **E** và *vol* **E′**$\leq (2\lambda - 1)^n$*vol* **E.** □

• Với **S** $\in \mathbb{R}^n$, ta **định nghĩa** $\mathbf{E}_{S/2} := \mathbf{E} \cap \{\mathbf{y} : \mathbf{S}^T(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \leq \mathbf{0}\}$.

Câu hỏi: dựng Elipsoit **E′ = E(x′, Q′)** bọc $\mathbf{E}_{S/2}$ sao cho *vol* **E′ càng nhỏ càng tốt?**

• **Bổ đề 4 (Elipsoit bọc bán cầu trên).** Cho **V** $= \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\| \leq 1\}$ **(hình cầu đơn vị)** và **V/2** $= \{y \in \mathbf{V} : y_1 \geq 0\}$ **(bán cầu trên). Khi đó V/2 nằm trong Elipsoit W = E(**x^1, Q_1**) với**

$$\mathbf{x}^1 = \left(\frac{1}{n+1}, 0, \ldots, 0\right)^T \text{ và } \mathbf{Q}_1 = diag\left(\frac{1}{n+1}, \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}, \ldots, \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}\right). \qquad \square$$

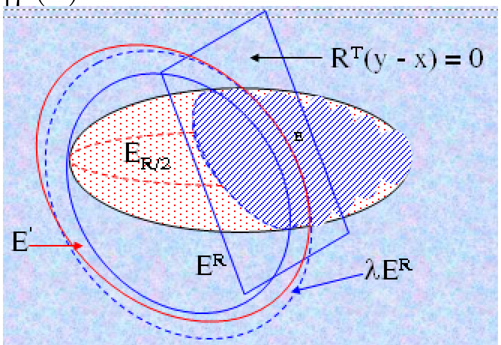


• **Bổ đề 5 (Elipsoit sau bọc nửa Elipsoit trước):**

E = E(x, Q) không suy biến. $\mathbf{E}_{R/2}$ sinh bởi **E** và $R \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$.
Khi đó $\mathbf{E}_{R/2}$ chứa trong Elipsoit $\mathbf{E}^R = \mathbf{E}(\mathbf{x}^R, \mathbf{Q}^R)$ với

$$\mathbf{x}^R = x + \frac{QW}{(n+1)\|W\|}\ (W = Q^T R), Q^R = \mathbf{QFQ_1F}^T,$$

F là ma trận trực giao cấp n có cột đầu là $\mathbf{W}/\|\mathbf{W}\|$.
Thể tích $\rho(\mathbf{E^R}) \geq \frac{n}{n+1}\rho(\mathbf{E})$. $\square$



- **Bổ đề 6 (Giả thiết như ở Bổ đề 5):**

a) $\mathbf{E}_{R/2} \subset E^R \subset E'$.
b) $vol\ \mathbf{E}' \leq 2^{-1/(2n)} vol\ \mathbf{E}$. $\square$

3 Thuật toán đa thức Khachian

- Xuất phát từ $\mathbf{E}_0$ **- hình cầu** tâm $x^0 = 0$ bán kính $nC^n n!$

Bước k = 0, 1, 2, ... Có Elipsoit $E_k = E(x^k, Q_k)$.
a) $\theta_i(x^k) = < a^i, x^k > -b_i \leq \epsilon\, \forall i \Rightarrow x^k$ là **nghiệm của hệ (1) : Dừng thuật toán.**
b) $\exists i : \theta_(x^k) > \epsilon$. Chọn chỉ số $i^* = argmax_{i=1,\ldots,m}\theta_i(x^k)$.
Đặt $w^k = Q_k a^{i*}, F_k$ - ma trận trực giao, cột đầu là $w^k/\|w^k\|$.
Tính xấp xỉ

$$x^{k+1} \approx x^k - \frac{Q_k w^k}{(n+1)\|w^k\|}, Q_{k+1} \approx (1 + \frac{1}{16n^2})Q_k F_k Q_1 (F_k)^T.$$

với độ chính xác $\delta \leq \rho(E_k)/24n^2$. Chuyển sang bước $k+1$. $\square$

- **Định lý (hội tụ sau thời gian đa thức):**

1. Nếu hệ (1) **có nghiệm** thì thuật toán sẽ **dừng ở tình huống a)**.
2. Nếu thuật toán **không dừng** sau $6n^3 \times \log_2(6nC)$ bước thì hệ (1) **vô nghiệm.** $\square$

- **L.G. Khachian** - GS toán học, nhà khoa học máy tính, sinh ngày 3/5/1952 tại Leningrad. Cha mẹ ông là người Armenia. Năm 1989 ông nhập cư vào Hoa Kỳ, làm việc và mất ở đó ngày 29/4/2005. $\square$

4 Áp dụng cho quy hoạch tuyến tính

• Bài toán **Quy hoạch tuyến tính** dạng chuẩn:

$$\mathbf{max}\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} : \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$
$$(\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

tương đương với **Hệ bất phương trình tuyến tính:**

$$\begin{cases} -\langle \mathbf{c}, \mathbf{x}\rangle + \langle \mathbf{b}, \mathbf{y}\rangle \leq \mathbf{0}, \\ \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \\ -\mathbf{x} \leq \mathbf{0}. \\ -\mathbf{A}^T\mathbf{y} \leq -\mathbf{c}, \\ -\mathbf{y} \leq \mathbf{0}. \end{cases}$$

Áp dụng **thuật toán Khachian** cho hệ bất phương trình tuyến tính này ta được **thuật toán đa thức** giải bài toán quy hoạch tuyến tính. □

• **Lịch sử thuật toán q.h.t.t. :** Phương pháp nhân tử giải (tiền thân của phương pháp đơn hình) **L.V. Kantorovich** (Nga, 1939) - phương pháp đơn hình (thuật toán trung bình đa thức, trường hợp xấu nhất là thuật toán hàm mũ) **G.B. Dantzig** (Mỹ, 1947) - thuật toán đa thức đầu tiên **L.G. Khachian** (Nga, 1979) - thuật toán chiếu đa thức hiệu quả **N. K. Karmarkar** (Ấn độ, 1984), ... □

5 Một số mở rộng

Thuật toán đa thức Khachian được mở rộng cho hai bài toán tối ưu sau đây:

• Bài toán **Quy hoạch phân tuyến tính:**

$$\mathbf{min}\{\tfrac{\mathbf{c}^T\mathbf{x}+\mathbf{c}_0}{\mathbf{d}^T\mathbf{x}+\mathbf{d}_0} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$
$$(\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{c}_0, \mathbf{d}_0 \in \mathbb{R})$$

• Bài toán **Quy hoạch lồi toàn phương:.**

$$\mathbf{min}\{\mathbf{c}^T\mathbf{x} + \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Qx} : \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$$
$$(\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n\times n}\ \tfrac{1}{2}\ \textbf{xác định dương}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n)$$

• **Bài toán chấp nhận lồi** (Convex feasibility problen):

Tìm một **điểm thuộc giao** của một số (hữu hạn hay vô hạn) **tập lồi, đóng** cho trước trong một **không gian nào đó.**

Mỗi tập lồi thành phần có thể là một **nửa không gian đóng** (hệ bất phương trình tuyến tính đã xét) hoặc được cho **dưới dạng ẩn** như là tập nghiệm của

a- bài toán tối ưu, **b-** bài toán bù tuyến tính, phi tuyến,

c- bài toán điểm bất động, **d-** bài toán bất đẳng thức biến phân,

e- bài toán cân bằng, v.v ... □

Tài liệu tham khảo

[1] **L.G. Khachian. Thuật toán đa thức trong quy hoạch tuyến tính. Báo cáo Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô, 1979, 244, $N^0$5, 1093 - 1096 (tiếng Nga).**

[2] **H. Tụy, T. V. Thiệu. Thuật toán Khachian giải quy hoạch tuyến tính trong thời gian đa thức. Tạp chí Toán học, tập X, số 1 (3-1982), 1 - 8.** □


Leonid Genrikhovich Khachian (1952 - 2005). □

Tăng cường hoạt động tiếng Anh chuyên ngành Toán tại Trường Đại học Đồng Tháp

Nguyễn Văn Dũng *

Tóm tắt nội dung

Trong bài viết này, chúng tôi trình bày tóm tắt một số thực trạng về giảng dạy Toán bằng tiếng Anh và một số đặc điểm của tiếng Anh chuyên ngành Toán. Trên cơ sở đó, chúng tôi đề xuất một số giải pháp tăng cường hoạt động liên quan tiếng Anh chuyên ngành Toán tại Trường Đại học Đồng Tháp

1 Thực trạng giảng dạy tiếng Anh chuyên ngành Toán

Việc dạy học bằng Tiếng Anh ở các nước hoặc vùng lãnh thổ mà ngôn ngữ đầu tiên của đa số người dân không phải là Tiếng Anh xuất hiện đầu tiên ở Châu Âu từ thập niên 60 của thế kỉ XX, sau đó, phát triển nhanh trong những năm 1995 - 2005 không chỉ ở Châu Âu, Châu Mĩ mà còn ở Châu Phi và Châu Á. Ban đầu, việc dạy học tiếng Anh ở các nước được tổ chức như một ngoại ngữ, về sau nhiều quốc gia đã coi tiếng Anh như là một ngôn ngữ thứ hai và được tổ chức ngay từ khi học sinh đến trường học. Việc này dẫn đến hàng loạt các quốc gia có xu hướng dạy học bằng Tiếng Anh các môn trong chương trình giáo dục ở các nước hoặc vùng lãnh thổ mà ngôn ngữ đầu tiên của đa số người dân không phải là Tiếng Anh. Như vậy, việc dạy học môn Toán và các môn khoa học khác bằng Tiếng Anh là xu hướng được nhiều quốc gia trên thế giới mà Tiếng Anh không là ngôn ngữ đầu tiên đặc biệt quan tâm bởi tính ngày càng phổ biến và quan trọng của Tiếng Anh.

Đối với Việt Nam, việc tổ chức dạy học môn Toán và một số môn khoa học khác bằng Tiếng Anh sẽ tạo ra một lực đẩy quan trọng cho học sinh học tập nâng cao trình độ ngoại ngữ, trang bị kiến thức khoa học bằng một ngôn ngữ phổ biến trên thế giới, mở ra cho thế hệ học sinh Việt Nam cánh cửa hội nhập quốc tế về giáo dục và khoa học công nghệ. Do đó, trong những năm gần đây, Đảng và Nhà nước rất quan tâm việc dạy và học ngoại ngữ trong hệ thống giáo dục quốc dân. Nghị quyết số 29 NQ/TW ngày 04/11/2013 của Hội nghị Trung ương 8 của Đảng Cộng sản Việt Nam khóa XI về đổi mới căn bản, toàn diện giáo dục và tạo đào đã nêu rõ: "Chủ động, tích cực hội nhập quốc tế để phát triển giáo dục và đào tạo, đồng thời giáo dục và đào tạo phải đáp ứng yêu cầu hội nhập quốc tế để phát triển đất nước".

*Trường Đại học Đồng Tháp

Quyết định số 1400/QĐ-TTG ngày 30/09/2008 của Thủ tướng Chính phủ về việc phê duyệt Đề án dạy và học ngoại ngữ trong hệ thống giáo dục quốc dân giai đoạn 2008 - 2020 đã xác định: "Xây dựng và triển khai các chương trình dạy và học bằng ngoại ngữ cho một số môn như: Toán và một số môn phù hợp ở các trường trung học phổ thông". Quyết định số 2080/QĐ-TTG ngày 22/12/2017 của Thủ tướng Chính phủ về việc phê duyệt điều chỉnh, bổ sung Đề án dạy và học ngoại ngữ trong hệ thống giáo dục quốc dân giai đoạn 2017 - 2025 đã chỉ rõ "Từng bước triển khai dạy học tích hợp ngoại ngữ trong một số môn học khác (như Toán và các môn khoa học tự nhiên, môn chuyên ngành) bằng ngoại ngữ". Công văn số 955/BGDĐT-ĐANN ngày 11/3/2021của Bộ Giáo dục và Đào tạo về việc hướng dẫn nhiệm vụ trọng tâm năm 2022 của Đề án ngoại ngữ quốc gia và đề xuất Kế hoạch triển khai tại đơn vị đã xác định: "Đối với chương trình giáo dục phổ thông, việc dạy tích hợp ngoại ngữ trong một số môn học khác, dạy một số môn học khác (như Toán và các môn khoa học) bằng ngoại ngữ thì triển khai thực nghiệm/thí điểm chương trình tại những cơ sở giáo dục có nhu cầu và đủ điều kiện".

Để cụ thể hóa các chủ trương, chính sách của Đảng và Nhà nước về việc dạy học Toán và các môn khoa học khác bằng Tiếng Anh, các địa phương đã có những chương trình, kế hoạch cụ thể để thực hiện công tác này. Nhiều cuộc thi uy tín liên quan đến Toán Tiếng Anh như Violympic Toán Tiếng Anh, Olympic Toán Tiếng Anh SEAMO,... đã được tổ chức trên phạm vi khu vực, toàn quốc và quốc tế. Các cuộc thi này giúp học sinh làm quen với Toán Tiếng Anh, thử sức, trau dồi và học hỏi thêm nhiều kiến thức cũng như kỹ năng toán học; góp phần làm cho việc dạy học Toán bằng Tiếng Anh trở nên sôi nổi và chất lượng hơn. Đồng thời, thông qua các cuộc thi, các cấp quản lý cũng đánh giá năng lực Toán Tiếng Anh đạt được của học sinh ở các cấp độ khác nhau; phát hiện và khuyến khích các tài năng trẻ phát triển; đóng góp cho nền giáo dục của quốc gia.

Tại tỉnh Đồng Tháp, Ủy Ban nhân dân Tỉnh đã ban hành Kế hoạch số 40/KH-UBND ngày 26/02/2019 về thực hiện Đề án dạy và học ngoại ngữ trong hệ thống giáo dục quốc dân trên địa bàn tỉnh Đồng Tháp giai đoạn 2019 - 2025. Kế hoạch đã xác định: Triển khai chương trình dạy học một số môn khoa học bằng tiếng Anh (Toán, Vật Lý, Hóa học, Sinh học) ở 02 trường THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu và THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu trong năm học 2018 - 2019 và mở rộng các đơn vị có đủ điều kiện thực hiện trong các năm tiếp theo.

Tuy nhiên, việc triển khai dạy học Toán bằng Tiếng Anh chưa thật sự hiệu quả, chưa tạo được phong trào dạy học Toán bằng Tiếng Anh sôi nổi trong các cơ sở giáo dục trên địa bàn tỉnh Đồng Tháp. Có nhiều nguyên nhân của tình trạng này, có thể kể đến là năng lực của giáo viên Toán chưa đáp ứng được yêu cầu dạy Toán bằng Tiếng Anh; giáo viên chưa được tập huấn, bồi dưỡng việc dạy Toán bằng Tiếng Anh; nguồn tài liệu cho hoạt động dạy học Toán bằng Tiếng Anh chưa phù hợp với thực tiễn địa phương; năng lực Tiếng Anh của học sinh chưa đáp ứng được yêu cầu học Toán bằng Tiếng Anh, cơ sở vật chất chưa đảm bảo việc học Toán bằng Tiếng Anh, ...

2 Một số đặc điểm của tiếng Anh chuyên ngành Toán

2.1 Tiếng Anh chuyên ngành Toán không quá phức tạp

Tiếng Anh chuyên ngành Toán là một nội dung của tiếng Anh. Những nội dung như phát âm, quy tắc ngữ pháp, thì, động từ, câu hỏi trong toán học, ... cũng tương tự trong tiếng Anh tổng quát.

Đặc biệt, vì nội dung toán học là chân lí nên thì hiện tại đơn thường được sử dụng trong bài viết toán học và động từ số ít thường được sử dụng trong các công thức toán học. Chẳng hạn

$1 + 1 = 2$ được đọc là one plus one *equals* two.

Tiếng Anh tổng quát rất đa dạng về từ vựng. Tuy nhiên, với mức độ giảng dạy trong chương trình phổ thông, không có quá nhiều từ và cụm từ tiếng Anh chuyên ngành Toán. Hơn nữa, trong khi từ vựng tiếng Anh tổng quát là đa nghĩa, phụ thuộc vào ngữ cảnh và tình huống sử dụng thì hầu như tất cả các từ tiếng Anh trong toán học chỉ có một nghĩa tiếng Việt.

Ngược lại với từ vựng tiếng Anh chuyên ngành, hầu hết từ vựng đều có một nghĩa toán học duy nhất, mỗi công thức toán học lại có nhiều cách đọc khác nhau. Điều này tạo sự linh hoạt cho người sử dụng khi diễn đạt. Ví dụ

$1 + 1 = 2$ có thể đọc là:
one plus one equals two
one plus one equal to two
one and one is two
one adds one which is two
the sum of one and one is two
the quantity of one plus one is two.

Với mục đích và dùng tiếng Anh để dạy học Toán với mục tiêu là mục tiêu Toán học và đặc điểm của văn bản Toán học là ngắn gọn và súc tích nên để sử dụng tiếng Anh trong dạy học toán thì quy tắc KISS : Keep it short and simple (Ngắn gọn và đơn giản) thường được sử dụng. Điều này cũng giảm bớt sự phức tạp của Toán bằng tiếng Anh.

2.2 Có nhiều thuận lợi cho dạy học tiếng Anh chuyên ngành Toán

Hiện tại, bộ sách toán song ngữ [3]: Sách giáo khoa toán song ngữ Việt - Anh lớp 3 đến lớp 12, Nhà xuất bản Giáo dục, 2015 là một tài liệu tham khảo thuận lợi cho người học biết nghĩa tiếng Việt và dịch từ tiếng Việt sang tiếng Anh đối với các nội dung toán phổ thông. Bộ sách song ngữ này cũng là một tài liệu đủ tốt cho việc viết các văn bản Toán bằng tiếng Anh trong chương trình phổ thông.

Đối với việc dạy học Toán bằng tiếng Anh, cũng có những tài liệu tập huấn khá bổ ích, nhiều đợt tập huấn được tổ chức. Người dạy có thể tham khảo những kinh nghiệm dạy học Toán bằng tiếng Anh từ đồng nghiệp để hỗ trợ cho công việc của bản thân [2].

Đối với việc đọc các công thức Toán bằng tiếng Anh, có những tài liệu hướng dẫn chi tiết, chẳng hạn tài liệu tham khảo [1] và các tài liệu tương tự. Trong tài liệu [1], các tác giả đã hướng dẫn chi tiết cách đọc từ các bảng chữ cái, các kí hiệu cơ bản, công thức đại số, công thức giải tích, các biểu thức hyperbolic và biểu thức lượng giác, các công thức lí thuyết tập hợp và logic, các công thức hình học sơ cấp và hình học giải tích, các công thức toán tài chính và thống kê, các công thức giải tích, các công thức đại số tuyến tính, các công thức trong những không gian trừu tượng và topo, các đồ thị và biểu đồ. Người học cơ bản có thể tự học cách đọc của hầu hết các công thức trong tài liệu này.

Đặc biệt, trong thời đại bùng nổ của công nghệ như hiện nay, không chỉ tiếng Anh chuyên ngành Toán mà tất cả đều được sự hỗ trợ tuyệt đối của công nghệ. Chúng ta có thể và nhất thiết phải sử dụng Internet, YouTube, Google, và vô số ứng dụng khác trong hỗ trợ việc dạy học tiếng Anh.

Ví dụ, muốn được học tiếng Anh với người bản ngữ, người học có thể lên YouTube tìm kiếm một series học tiếng Anh miễn phí, trong đó có tiếng Anh cho Toán.

Muốn đọc một công thức Toán bằng tiếng Anh, người học có thể hỏi Google, Chat GPT.

Muốn thực hành dạy học Toán bằng tiếng Anh, người học có thể theo dõi một bài giảng tương tự trên các kho dữ liệu bài giảng trực tuyến hoặc trên YouTube,...

Muốn luyện tập nâng cao kĩ năng nghe nói tiếng Anh theo kiểu vừa học vừa chơi, người học có thể sử dụng các app như Duolingo, Monkey Junior,...

Để tham khảo các nội dung Toán tiếng Anh ở phổ thông, người học có thể tham khảo Wikipedia.

3 Một số biện pháp tăng cường hoạt động tiếng Anh chuyên ngành Toán tại Trường Đại học Đồng Tháp

Để nâng tăng cường hoạt động tiếng Anh chuyên ngành Toán tại Trường Đại học Đồng Tháp, chúng tôi đề xuất một số biện pháp sau đây.

1. Không ngừng cải tiến cách tổ chức dạy và học các học phần tiếng Anh chuyên ngành Toán trong chương trình đào tạo Sư phạm Toán học nói chung và chuyên ngành Toán tiếng Anh nói riêng.

   Tại Trường Đại học Đồng Tháp, môn học Ngoại ngữ chuyên ngành / Tiếng Anh chuyên ngành Toán được đưa vào giảng dạy cho sinh viên ngành Sư phạm Toán học từ năm 2010 với mục tiêu sinh viên có năng lực tiếng Anh trình bày bằng văn bản và bằng lời những nội dung cơ bản của chương trình toán phổ thông như định nghĩa, tính chất và lời giải.

   Từ năm học 2023 - 2024, chuyên ngành Sư phạm Toán tiếng Anh được thực hiện tại Trường Đại học Đồng Tháp với mục tiêu đào tạo sinh viên Sư phạm Toán học có khả năng giảng dạy toán bằng tiếng Anh ở trường phổ thông sau khi tốt nghiệp. Cụ thể, tổ chức đào tạo ngành Sư phạm Toán học chuyên ngành Toán tiếng Anh với tối thiểu 25% số tín chỉ các học phần của ngành được dạy bằng ngoại ngữ (song ngữ Anh - Việt hoặc 100% bằng tiếng Anh).

   Bên cạnh đội ngũ giảng viên của Khoa, chương trình sẽ có sự tham gia giảng dạy của một số giảng viên quốc tế theo hình thức dạy học trực tiếp, online hoặc các chuyên đề ngắn hạn.

2. Tăng cường hoạt động trao đổi giảng viên và sinh viên quốc tế.

   Trong thời gian qua, Khoa Sư phạm Toán – Tin đã thực hiện nhiều hoạt động trao đổi giảng viên và sinh viên quốc tế đến làm việc tại Khoa cũng như đi làm việc ở một số trường đại học trong khu vực.

   Một trong những chương trình đó là chương trình SEA Teacher của Tổ chức Bộ trưởng Bộ Giáo dục các nước Đông Nam Á (SEAMEO) tạo cơ hội cho sinh viên Sư phạm thuộc các trường đại học ở Đông Nam Á có kinh nghiệm giảng dạy thực tế tại các trường đại học thuộc các quốc gia khác nhau.

   Mục tiêu của chương trình là phát triển kỹ năng giảng dạy và nghiệp vụ sư phạm; khuyến khích thực hành Tiếng Anh trong dạy học; mở rộng tầm nhìn về khu vực và thế giới; giải quyết các tình huống, cơ hội trong dạy học với các nền văn hóa khác.

Sinh viên của Khoa đã tham gia chương trình thực tập sư phạm SEA teacher ở các nước trong khu vực như Thái Lan, Indonesia và Philippines và Khoa cũng đã đón các bạn sinh viên từ Indonesia và Philippines đến thực tập sư phạm dưới sự hướng dẫn của giảng viên của Khoa.

3. Tăng cường kết nối với các trường phổ thông, nhất là trường chuyên và trường có chương trình dạy Toán bằng tiếng Anh trong địa bàn Đồng Tháp để tổ chức các hoạt động liên quan đến tiếng Anh chuyên ngành Toán.

Tài liệu

[1] Larry A. Chang, C. M. White, and L. Abrahamson, *Handbook for spoken mathematics*, Livermore, CA: Lawrence Livermore National Laboratory, 1983.

[2] Bộ Giáo dục và Đào tạo, *Tài liệu tập huấn giảng dạy môn Toán bằng tiếng Anh*, Hà Nội, 2013.

[3] Nhiều tác giả, *Bộ sách song ngữ toán Việt-Anh lớp 3 đến lớp 12*, Nhà xuất bản giáo dục, 2015.

TỔNG QUÁT HÓA MỘT SỐ BÀI THI OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

Phan Quang Huy - T07*
Vũ Tiến Việt - T01†
Khổng Chí Nguyện - TTU‡

Tóm tắt nội dung

Trong các kỳ thi Olympic Toán sinh viên, luôn có các bài toán về tích phân.
Là những người tham gia ôn luyện, dẫn đoàn sinh viên của một số trường tham dự các kỳ thi, chúng tôi xin tổng quát hóa một số bài toán thuộc chủ đề trên.

1. **Bài toán 1**. Cho hàm $f(x)$ xác định và khả vi trên đoạn $[0,1]$, với $f(1)=0$ và thỏa mãn $\int_0^1 x^2 f(x)dx = 1$. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx \geq 63$$

Bài toán tổng quát. Cho hàm $f(x)$ xác định và khả vi trên đoạn $[0,1]$, với $f(1)=0$ và thỏa mãn $\int_0^1 x^n f(x)dx = 1$ với $n \geq 1$ là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx \geq (2n+3)(n+1)^2$$

Lời giải. Sử dụng tích phân từng phần ta có

$$1 = \int_0^1 x^n f(x)dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} f'(x)dx = -\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} f'(x)dx$$

Theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz về tích phân ta có

$$\begin{aligned} 1 &= \Big[\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{n+1} f'(x)dx\Big]^2 \leq \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{(n+1)^2}dx. \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx \\ &= \frac{1}{(2n+3)(n+1)^2}. \int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx \end{aligned}$$

*Đại học Kỹ thuật Hậu cần CAND
†Học viện An ninh nhân dân
‡Đại học Tân Trào, Tuyên Quang

Suy ra

$$\int_0^1 \left[f'(x)\right]^2 dx \geq (2n+3)(n+1)^2$$

2. **Bài toán 2**. Cho hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0,1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $\xi \in (0,1)$ sao cho

$$\xi^2 f(\xi) = \int_0^{\xi} xf(x)dx$$

Bài toán tổng quát. Cho hàm $f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $[0,1]$, thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng với mỗi số tự nhiên $n \geq 1$ tồn tại $\xi \in (0,1)$ sao cho

$$\xi^{n+1} f(\xi) = n \int_0^{\xi} x^n f(x)dx$$

Lời giải. Xét hàm

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad t = 0 \\ \frac{1}{t^n} \int_0^t x^n f(x)dx & \text{khi} \quad 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Ta thấy

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} g(t) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t^n} \int_0^t x^n f(x)dx \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{t \to 0^+} \frac{t^n f(t)}{nt^{n-1}} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{tf(t)}{n} = 0 = g(0), \end{aligned}$$

như vậy $g(t)$ liên tục trên $[0,1]$.

Rõ ràng $g(t)$ khả vi trong $(0,1)$ và

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{t^{2n} f(t) - nt^{n-1} \int_0^t x^n f(x)dx}{t^{2n}} \\ &= \frac{t^{n+1} f(t) - n \int_0^t x^n f(x)dx}{t^{n+1}}. \end{aligned}$$

Ta sẽ chứng tỏ tồn tại $a \in (0,1]$ để $g(a) = 0$.

Thật vậy, giả sử ngược lại $g(t) \neq 0, \forall t \in (0,1]$. Không mất tổng quát có thể coi $g(t) > 0, \forall t \in (0,1]$).

Đặt $F(t) = \displaystyle\int_0^t f(x)dx, t \in (0,1]$ là hàm khả vi, $F'(t) = f(t)$.

Với $t \in (0,1]$ ta có

$$g(t) = \frac{1}{t^n}\int_0^t x^n f(x)dx = \frac{1}{t^n}[x^n F(x)]\Big|_0^t - \frac{1}{t^n}\int_0^t nx^{n-1}F(x)dx$$
$$= F(t) - \frac{1}{t^n}\int_0^t nx^{n-1}F(x)dx := F(t) - G(t),$$

trong đó $G(t) = \dfrac{1}{t^n}\displaystyle\int_0^t nx^{n-1}F(x)dx.$

Ta thấy $G(t)$ khả vi trong $(0,1]$ và

$$G'(t) = \frac{nt^{2n-1}F(t) - nt^{n-1}\int_0^t nx^{n-1}F(x)dx}{t^{2n}}$$
$$= \frac{nt^{n-1}[F(t) - G(t)]}{t^n} = \frac{ng(t)}{t} > 0.$$

Do vậy $G(t)$ đơn điệu tăng trên $[0,1]$, nên $G(1) > G(0) = 0$.

Mặt khác $F(1) = \displaystyle\int_0^1 f(x)dx = 0$ nên $g(1) = F(1) - G(1) = -G(1) < 0$, mâu thuẫn với giả thiết $g(t) > 0, \forall t \in (0,1]$.

Vậy phải tồn tại $a \in (0,1]$ để $g(a) = 0$. Dùng định lý Rolle cho $g(t)$ thì tồn tại $\xi \in (0,a) \subset (0,1)$ sao cho

$$0 = g'(\xi) = \frac{\xi^{n+1}f(\xi) - n\int_0^\xi x^n f(x)dx}{\xi^{n+1}}.$$

Dẫn tới điều cần chứng minh là

$$\xi^{n+1}f(\xi) = n\int_0^\xi x^n f(x)dx$$

3. **Bài toán 3**. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục và thỏa mãn $f'(0) = 0$, đồng thời $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx.$

   Chứng minh tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $\displaystyle\int_0^c xf(x)dx = \frac{2c}{3}\int_0^c f(x)dx.$

   Bài toán tổng quát: Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi liên tục đến cấp $k-1$, với $k \in \mathbb{N}$ và thỏa mãn $f^{(k-1)}(0) = 0$, đồng thời

   $$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx.$$

   Chứng minh tồn tại $c \in (0,1)$ để

   $$\int_0^c xf(x)dx = \frac{kc}{k+1}\int_0^c f(x)dx.$$

Lời giải. Xét hàm

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \text{khi } t = 0 \\ \dfrac{t\int\limits_0^t f(x)dx - \int\limits_0^t xf(x)dx}{t^{k-1}}, & \text{khi } 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

Sử dụng quy tắc L"Hopital ta thấy

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0} g(t) &= \lim_{t\to 0} \frac{t\int\limits_0^t f(x)dx - \int\limits_0^t xf(x)dx}{t^{k+1}} = \lim_{t\to 0} \frac{\int\limits_0^t f(x)dx}{(k+1)t^k} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(t)}{(k+1)kt^{k-1}} = \cdots = \lim_{t\to 0} \frac{f^{(k-1)}(t)}{(k+1)k(k-1)...2.1} \\ &= \frac{f^{(k-1)}(0)}{(k+1)k(k-1)...2.1} = 0 = g(0). \end{aligned}$$

Vậy $g(t)$ liên tục trên $[0,1]$ và rõ ràng $g(0) = g(1) = 0$.

Mặt khác $g(t)$ khả vi trong $(0,1)$ và

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{t^{k+1}\int\limits_0^t f(x)dx - (k+1)t^k\left[t\int\limits_0^t f(x)dx - \int\limits_0^t xf(x)dx\right]}{t^{2(k+1)}} \\ &= \frac{(k+1)\int\limits_0^t xf(x)dx - kt\int\limits_0^t f(x)dx}{t^{k+2}}. \end{aligned}$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$.

Suy ra tồn tại $c \in (0,1)$ để

$$\int_0^c xf(x)dx = \frac{kc}{k+1}\int_0^c f(x)dx.$$

4. **Bài toán 4**. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ liên tục thỏa mãn $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.

   1) Chứng minh rằng tồn tại điểm $\alpha \in (0,1)$ sao cho $\displaystyle\int_0^\alpha f(x)dx = 0$.

   Từ đó suy ra với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho

   $$f(c) = a\int_0^c f(x)dx.$$

   2) Chứng minh rằng với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho

   $$cf(c) + a\int_0^c f(x)dx = 0.$$

Lời giải. 1) Xét hàm $g(t) = t\int_0^t f(x)dx - \int_0^t xf(x)dx, t \in [0,1]$.

Ta có $g(0) = g(1) = 0$ và $g'(t) = \int_0^t f(x)dx$.

Theo định lý Rolle tồn tại $\alpha \in (0,1)$ sao cho $g'(\alpha) = 0$, hay $\int_0^\alpha f(x)dx = 0$.

Lại xét hàm $h(t) = e^{-at}\int_0^t f(x)dx, t \in [0,1]$.

Ta có $h(0) = h(\alpha) = 0$ và $h'(t) = e^{-at}\Big[f(t) - a\int_0^t f(x)dx\Big]$.

Theo định lý Rolle $\exists c \in (0,\alpha) \subset (0,1)$ sao cho $h'(c) = 0$, hay $f(c) = a\int_0^c f(x)dx$.

• Chọn a thích hợp sẽ được các bài thi Olympic.

Chẳng hạn với $a = 2018$ là bài thi OLP-2018 (bảng B) tại Quảng Bình.

2) Xét hàm $F(x) = \int_0^x f(t)dt, x \in [0,1]$. Ta có $F(0) = 0$, $F'(x) = f(x)$ và

$$\begin{aligned} F(1) &= \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x) = \int_0^1 xF'(x)dx \\ &= xF(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 F(x)dx = F(1) - \int_0^1 F(x)dx. \end{aligned}$$

Do đó $\int_0^1 F(x)dx = 0 \quad (*)$.

Hàm $F(x)$ liên tục trên $[0,1]$. Ta nhận thấy rằng nếu $F(x) > 0, \forall x \in (0,1)$ thì $\int_0^1 F(x)dx > 0$, nếu $F(x) < 0, \forall x \in (0,1)$ thì $\int_0^1 F(x)dx < 0$, đều trái với $(*)$.

Vậy phải tồn tại $b \in (0,1)$ để $F(b) = 0$.

Lại xét hàm $g(x) = x^a F(x)$. Ta có $g'(x) = ax^{a-1}F(x) + x^a f(x)$, $g(0) = g(b) = 0$.

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,b) \subset (0,1)$ sao $g'(c) = 0$. Từ đó

$$ac^{a-1}\int_0^c f(x)dx + c^a f(c) = 0 \qquad \text{hay} \qquad cf(c) + a\int_0^c f(x)dx = 0.$$

• Chọn a thích hợp sẽ được các bài thi Olympic.

5. **Bài toán 5**. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$.

Chứng minh rằng với mỗi số $a \in \mathbb{R}$ tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho

$$f(c) = af'(c)\int_0^c f(x)dx.$$

Lời giải. Xét hàm $g(t) = e^{-af(t)} \int_0^t f(x)dx, t \in [0,1]$.

Theo bài toán 4 tồn tại $\alpha \in (0,1)$ để $\int_0^\alpha f(x)dx = 0$. Ta có $g(0) = g(\alpha) = 0$ và

$$g'(t) = e^{-af(t)} \Big[f(t) - af'(t) \int_0^t f(x)dx \Big].$$

Theo định lý Rolle tồn tại $c \in (0,\alpha) \subset (0,1)$ sao cho $g'(c) = 0$.

Do đó $f(c) = af'(c) \int_0^c f(x)dx$.

• Chọn a thích hợp sẽ được các bài thi Olympic.

Chẳng hạn với $a = 2018$ là bài thi OLP-2018 (bảng A) tại Quảng Bình.

6. **Bài toán 6**. Cho hàm $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ khả vi thỏa mãn $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = k$.

   Chứng minh rằng tồn tại điểm $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = 6k$.

Lời giải. Xét hàm $g(x) = 6kx - 2k$. Dễ dàng thấy $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 xg(x)dx = k$.

Suy ra $\int_0^1 [f(x) - g(x)]dx = 0$. Hàm $h(x) = f(x) - g(x)$ liên tục trên $[0,1]$ và có tích phân $\int_0^1 h(x)dx = 0$, nên không thể xảy ra trường hợp $h(x) > 0, \forall x \in (0,1)$ hoặc trường hợp $h(x) < 0, \forall x \in (0,1)$.

Như thế phương trình $h(x) = 0$ phải có ít nhất một nghiệm trong $(0,1)$.

Giả sử rằng $h(x) = 0$ chỉ có một nghiệm $x = a \in (0,1)$.

Xảy ra hai khả năng sau:

+) Nếu $h(x) < 0, \forall x \in (0,a)$, thì $h(x) > 0, \forall x \in (a,1)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xf(x)dx - k &= \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xg(x)dx \\
&= \int_0^1 x[f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 xh(x)dx \\
&= \int_0^a xh(x)dx + \int_a^1 xh(x)dx \\
&> \int_0^a ah(x)dx + \int_a^1 ah(x)dx \\
&= a\Big[\int_0^a h(x)dx + \int_a^1 h(x)dx \Big] = a\int_0^1 h(x)dx = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 xf(x)dx > k$, mâu thuẫn với giả thiết của đề bài!

+) Nếu $h(x) > 0, \forall x \in (0, a)$, thì $h(x) < 0, \forall x \in (a, 1)$. Khi đó

$$\begin{aligned}
\int_0^1 xf(x)dx - k &= \int_0^1 xf(x)dx - \int_0^1 xg(x)dx \\
&= \int_0^1 x[f(x) - g(x)]dx = \int_0^1 xh(x)dx \\
&= \int_0^a xh(x)dx + \int_a^1 xh(x)dx \\
&< \int_0^a ah(x)dx + \int_a^1 ah(x)dx \\
&= a\Big[\int_0^a h(x)dx + \int_a^1 h(x)dx\Big] = a\int_0^1 h(x)dx = 0.
\end{aligned}$$

Suy ra $\int_0^1 xf(x)dx < k$, mâu thuẫn với giả thiết của đề bài!

Vậy $h(x) = 0$ phải có ít nhất hai nghiệm trong $(0, 1)$.

Giả sử hai nghiệm đó là $a, b \in (0, 1)$ và $a < b$.

Ta có $h(a) = h(b) = 0$, nên $f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$. Theo định lý Lagrange tồn tại $c \in (a, b) \subset (0, 1)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = 6k.$$

• Chọn k thích hợp sẽ được các bài thi Olympic.

Chẳng hạn với $k = 1$ là bài thi OLP-2010 tại Huế.

7. **Bài toán 7**. Cho hàm $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ khả tích với $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = k$.

   Chứng minh rằng $\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq 4k^2$.

Lời giải. Xét hàm $g(x) = 6kx - 2k$. Ta có $\int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx \geq 0$. Mặt khác

$$\begin{aligned}
\int_0^1 [f(x) - g(x)]^2 dx &= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 2\int_0^1 f(x)g(x)dx + \int_0^1 [g(x)]^2 dx \\
&= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 2\int_0^1 f(x)(6kx - 2k)dx + \int_0^1 (6kx - 2k)^2 dx \\
&= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 12k\int_0^1 xf(x)dx + 4k\int_0^1 f(x)dx \\
&\quad + \int_0^1 (36k^2x^2dx - 24k^2x + 4k^2)dx \\
&= \int_0^1 [f(x)]^2 dx - 4k^2.
\end{aligned}$$

Như thế $\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2 dx \geq 4k^2$.

• Chọn k thích hợp sẽ được các bài thi Olympic.

Chẳng hạn với $k = 1$ là bài thi OLP-2004 của Kiev.

8. **Bài toán 8**. Cho $f(x), g(x)$ là các hàm dương, liên tục trên $[a, b]$ và cho số thực k. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\frac{f(c)}{\int_a^c f(x)dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x)dx} = k$$

Lời giải. Xét $h(x) = e^{-kx} \displaystyle\int_a^x f(t)dt \int_x^b g(t)dt,\ x \in [a, b]$. Ta có $h(a) = h(b) = 0$ và

$$\begin{aligned} h'(x) &= -ke^{-kx} \int_a^x f(t)dt \int_x^b g(t)dt + e^{-kx} f(x) \int_x^b g(t)dt - e^{-kx} g(x) \int_a^x f(t)dt \\ &= -e^{kx} \Big[k \int_a^x f(t)dt \int_x^b g(t)dt - f(x) \int_x^b g(t)dt + g(x) \int_a^x f(t)dt\Big] \end{aligned}$$

Sử dụng định lý Rolle thì tồn tại $c \in (a, b)$ để $h'(c) = 0$.

Chú ý $e^{-kx}, f(x), g(x)$ là các hàm dương, ta suy ra tồn tại $c \in (a, b)$ để

$$k \int_a^c f(t)dt \int_c^b g(t)dt - f(c) \int_c^b g(t)dt + g(c) \int_a^c f(t)dt = 0,$$

hay là

$$k = \frac{f(c)}{\int_a^c f(t)dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(t)dx}, \ \frac{f(c)}{\int_a^c f(x)dx} - \frac{g(c)}{\int_c^b g(x)dx} = k$$

• Chọn k thích hợp sẽ được các bài thi Olympic.

9. **Bài toán 9**. Chứng minh với mỗi số n tự nhiên tồn tại số thực $x \in (0, 1)$ sao cho

$$\int_x^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t^2)...(1+t^{n+1})} dt = \frac{x^{n+1}}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^{n+1})}$$

Lời giải. Xét các hàm số

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{t^n}{(1+t)(1+t^2)...(1+t^{n+1})},\ t \in [0, 1], \\ F(x) &= x \int_x^1 f(t)dt,\ x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Ta có $F(0) = F(1) = 0$ và do $f(t)$ liên tục trên $[0,1]$ nên $F(x)$ khả vi trong $(0,1)$. Theo định lý Rolle tồn tại $x \in (0,1)$ để $F'(x) = 0$. Thế mà

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_x^1 f(t)dt - xf(x) \\ &= \int_x^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t^2)...(1+t^{n+1})}dt - \frac{x^{n+1}}{(1+x)(1+x^2)...(1+x^{n+1})}. \end{aligned}$$

Vậy có điều phải chứng minh.

• Chọn n thích hợp sẽ được các bài thi Olympic.

Chẳng hạn với $n = 2000$ là bài thi OLP-2001 tại Đại học Ngoại thương.

10. **Bài toán 10**. Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ là hàm dương và liên tục.
Chứng minh rằng với mỗi $n \in \mathbb{N}$ tồn tại $\theta(n)$ sao cho
$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\theta(n)} f(x)dx + \int_{1-\theta(n)}^1 f(x)dx.$$
Tính $\lim\limits_{n\to\infty}[n\theta(n)]$?
Lời giải. Với $x \in [0,1]$ ta xét hàm
$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_{1-x}^1 f(t)dt.$$
Ta có $g(0) = 0,\ g(1) = 2\displaystyle\int_0^1 f(t)dt > 0$ và $g(x)$ là hàm liên tục.
Theo định lý giá trị trung gian (định lý Darboux) với mỗi $n \in \mathbb{N}$ ta có
$0 < \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 f(x)dx < 2\int_0^1 f(t)dt$, nên phải tồn tại $\theta(n) \in (0,1)$ sao cho
$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)dx = g(\theta(n)) = \int_0^{\theta(n)} f(t)dt + \int_{1-\theta(n)}^1 f(t)dt.$$
Bây giờ theo định lý giá trị trung bình tích phân tồn tại $\xi_1(n) \in [0,\theta(n)]$ và tồn tại $\xi_2(n) \in [1-\theta(n),1]$ sao cho
$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)dx = [f(\xi_1(n)) + f(\xi_2(n))]\theta(n),$$
suy ra
$$n\theta(n) = \frac{1}{f(\xi_1(n)) + f(\xi_2(n))}\int_0^1 f(x)dx.$$
Mặt khác, do $f(x)$ là hàm dương và liên tục trên $[0,1]$ nên tồn tại
$0 < m \le f(x) \le M, \forall x \in [0,1]$. Dẫn tới
$$\frac{1}{n}\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{\theta(n)} f(x)dx + \int_{1-\theta(n)}^1 f(x)dx \ge 2m\theta(n),$$
suy ra
$$0 \le \theta(n) \le \frac{1}{2mn}\int_0^1 f(x)dx \ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\theta(n) = 0,\ \lim_{n\to\infty}\xi_1(n) = 0,\ \lim_{n\to\infty}\xi_2(n) = 1.$$
Từ đó ta được
$$\lim_{n\to\infty}[n\theta(n)] = \frac{1}{f(0)+f(1)}\int_0^1 f(x)dx.$$

• Chọn n thích hợp sẽ được các bài thi Olympic.

Tài liệu tham khảo

1. Hội Toán học Việt Nam.
Tuyển tập và Kỷ yếu thi Olympic Toán sinh viên từ năm 1993 đến năm 2019.

2. Nguyễn Văn Mậu, Lê Ngọc Lăng, Phạm Thế Long, Nguyễn Minh Tuấn.
Tuyển tập Olympic Toán sinh viên toàn quốc 1993 - 2005. Hà Nội 2006.

3. Vũ Tiến Việt. *Tài liệu ôn tập Olympic Toán sinh viên.*
Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2017.

4. Vũ Tiến Việt (chủ biên), Phan Thế Hải.
Một số chuyên đề ôn tập thi Olympic Toán sinh viên - Phần 2. Giải tích.
Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội, 2021.

ÁP DỤNG SỐ PHỨC TRONG GIẢI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG

Trần Lê Nam*

Tóm tắt nội dung

Chúng tôi giới thiệu phương pháp ứng dụng số phức vào việc giải một số bài toán hình học sơ cấp phẳng. Qua một số ví dụ, chúng ta thấy rằng việc đồng nhất 1 điểm trên mặt phẳng tọa độ, một véc-tơ tự do với một số phức giúp giải những bài toán thẳng hàng, đồng qui, góc trong hình phẳng được gọn gàng. Tuy nhiên, phương pháp này không áp dụng được cho các bài toán đề cập đến nhiều đường tròn.

1 Các kết quả hay dùng

Nếu chúng ta xét ánh xạ $f : (\mathbb{R}^2, +, .) \longrightarrow (\mathbb{C}, +, .)$ thì f là một đẳng cấu tuyến tính. Qua đẳng cấu f, một điểm $M(a, b)$ trên mặt phẳng Ơ-clít $\mathbb{R}$ được đồng nhất với một số phức $m = a + b\mathrm{i}$ trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$. Từ đó, một véc-tơ tự do $\vec{v} = (v_1, v_2)$ được đồng nhất với số phức $v = v_1 + v_2\mathrm{i}$.

Trong bài viết, chúng tôi dùng chữ cái nhỏ để chỉ tọa độ phức hay tọa vị của 1 điểm. Tương tự, số phức u được dùng ký hiệu cho vec-tơ $\vec{u}$ nếu không sợ nhầm lẫn. Thông qua đẳng cấu f, chúng ta thấy rằng tọa độ phức của một điểm có thể chứa phần tử đơn vị ảo i. Với tính chất đặc biệt $\mathrm{i}^2 = -1$ của i, những điểm A, B, C, ... nằm đường tròn đơn vị $(\mathbb{S}^2)\colon x^2 + y^2 = 1$ có tọa độ phức thỏa $a.\overline{a} = b.\overline{b} = \cdots = 1$.

Hơn nữa, ta có thể thực hiện việc phép chia số phức a cho số phức b, $b \neq 0$, trong khi không thể thực hiện phép chia 2 vec-tơ. Từ hai tính chất hay đó, với các bài toán hình học Ơ-clít, bất biến qua phép đồng dạng được giải quyết gọn gàng. Cụ thể, chúng ta xác định các bất biến của bài toán, sử dụng phép vị tự, phép tịnh tiến hay phép quay để đưa bài toán về trường hợp chính tắc. Nếu bài toán liên quan đến đa giác đều, đường tròn thì chuyển về đường tròn đơn vị. Nếu bài toán liên quan đến 3 điểm thì chọn gốc tọa độ là 1 trong 3 điểm đó, điểm còn lại là i hoặc 1. Sau đó, sử dụng các kết quả cổ điển sau để giải quyết bài toán.

1.1 Định lý

Trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$ cho hai điểm W_1, W_2 nằm trên *đường tròn đơn vị*.

1. Đường thẳng (W_1W_2) có phương trình dạng

$$(d)\colon z + w_1 w_2 \overline{z} = w_1 + w_2. \tag{1}$$

[*]**Khoa Sư phạm Toán-Tin**,
Trường Đại học Đồng Tháp

2. Đường thẳng (d) đi qua điểm V vuông góc với (W_1W_2) có phương trình dạng
$$(d): z - w_1w_2\overline{z} = v - w_1w_2\overline{v}. \tag{2}$$
3. Tiếp tuyến (t) tại điểm W của đường tròn $\mathbb{S}^1$ có phương trình
$$(t): z + w^2\overline{z} = 2w. \tag{3}$$

1.2 Hệ quả

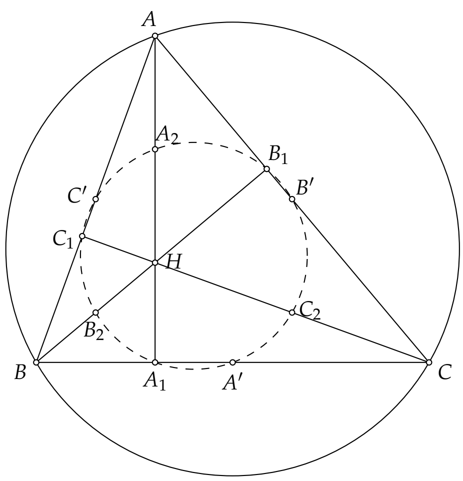
Trên mặt phẳng phức $\mathbb{C}$, cho A, B, C, D là 4 điểm nằm trên đường tròn đơn vị. Khi đó,

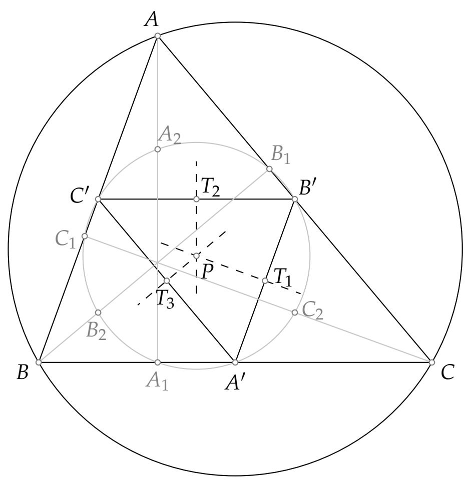
1. $\dfrac{a-b}{\overline{a}-\overline{b}} = -ab.$
2. Điểm M thuộc đường thẳng (AB) khi và chỉ khi $\overline{m} = \dfrac{a+b-m}{ab}\cdot$
3. Giao điểm (nếu có) của 2 tiếp tuyến tại A và B của $\mathbb{S}^1$ có tọa độ phức $\dfrac{2ab}{a+b}\cdot$
4. Chân đường vuông góc P từ điểm M đến đường thẳng (AB) có tọa độ phức
$$p = \frac{1}{2}(a+b+m-ab\overline{m}).$$
5. Giao điểm của hai đường thẳng (AB) và (CD) có tọa độ phức là
$$\frac{ab(c+d)-cd(a+b)}{ab-cd}\cdot$$

2 Một số bài toán áp dụng

Bài toán 1 (*Đường tròn Ơ-le*). *Cho (AA_1), (BB_1), (CC_1) là 3 đường cao của tam giác $\triangle ABC$, H là trực tâm của nó. Gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là trung điểm của AH, BH, CH, A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, BA, AC. Khi đó, chín điểm A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A', B', C' cùng nằm trên một đường tròn.*

Lời giải. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle ABC$ là đường tròn đơn vị.





Gọi P là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle A'B'C'$, T_1, T_2, T_3 lần lượt là trung điểm của $A'B', B'C', C'A'$.
Đường thẳng (PT_1) qua T_1 và vuông góc với (AB) nên có phương trình dạng

$$(PT_1)\colon z - ab\overline{z} = t_1 - ab\overline{t_1}.$$

Hay

$$(PT_1)\colon \overline{ab}z - \overline{z} = \overline{ab}t_1 - \overline{t_1}. \tag{4}$$

Mặt khác, ta có

$$t_1 = \frac{a' + b'}{2} = \frac{a + b + 2c}{4}. \tag{5}$$

Thay (5) vào (4), ta được

$$(PT_1)\colon \overline{ab}z - \overline{z} = \frac{1}{2}\left(\overline{ab}c - \overline{c}\right). \tag{6}$$

Tương tự, đường thẳng (PT_2) có phương trình dạng

$$(PT_2)\colon \overline{bc}z - \overline{z} = \frac{1}{2}\left(\overline{bc}a - \overline{a}\right). \tag{7}$$

Từ (6) và (7), ta có

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c).$$

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle A'B'C'$ là

$$d(P, A') = \left|\frac{b+c}{2} - \frac{a+b+c}{2}\right| = \frac{1}{2}.$$

Mặt khác, $h = a + b + c$. Do đó,

$$a_2 = \frac{1}{2}(2a + b + c).$$

Suy ra

$$|a_2 - p| = \frac{1}{2}|a| = \frac{1}{2}.$$

Do đó, A_2 nằm trên đường tròn $(A'B'C')$. Tương tự, B_2, C_2 nằm trên đường tròn $(A'B'C')$.

Theo Hệ quả 1.2,

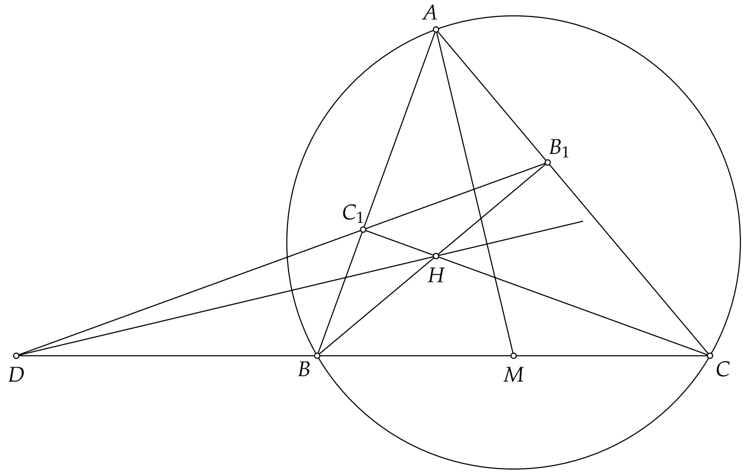
$$a_1 = \frac{1}{2}\left(b + c + a - bc\overline{a}\right).$$

Do $|a_1 - p| = \left| - bc\overline{a}\right|/2 = 1/2$ nên A_1 nằm trên (C).
Tương tự, hai điểm B_1, C_1 nằm trên đường tròn (C).

Vậy, chín điểm A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2, A', B', C' cùng nằm trên một đường tròn. □

Bài toán 2 (*MOP 1995*). *Cho (BB_1) và (CC_1) là hai đường cao của $\triangle ABC$ và $AB \neq AC$. Giả sử M là trung điểm của BC, H là trực tâm của $\triangle ABC$ và D là giao điểm của (BC) và (B_1C_1). Chứng minh rằng đường thẳng (DH) vuông góc với đường thẳng (AM).*

Lời giải. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle ABC$ là đường tròn đơn vị.



Ta có $h = a + b + c$, $m = \dfrac{b+c}{2}\cdot$
Tính được

$$d = \frac{a^2b + a^2c + ab^2 + ac^2 - b^2c - bc^2 - 2abc}{2(a^2 - bc)}\cdot$$

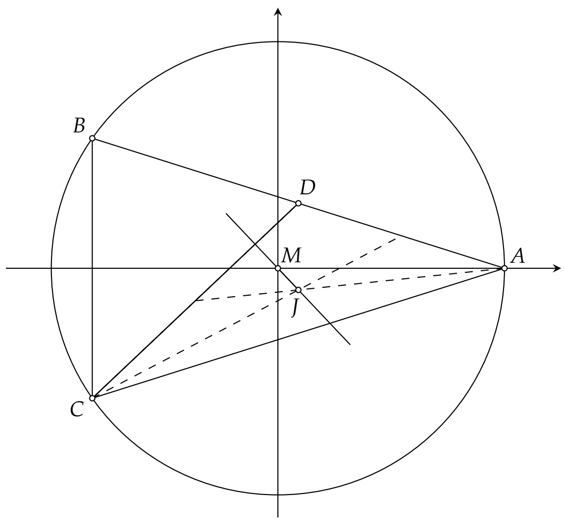
Suy ra

$$d - h = \frac{(b + c - 2a)(ab + bc + ca + a^2)}{2(a^2 - bc)}\cdot$$

Từ đó suy ra điều phải chứng minh. □

Bài toán 3 (*vô địch Anh 1983*). *Cho tam giác $\triangle ABC$ cân đỉnh A, gọi M là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle ABC$; D là trung điểm của đoạn thẳng AB và J là trọng tâm của tam giác $\triangle ACD$. Chứng minh rằng hai đường thẳng (MJ) và (CD) vuông góc nhau.*

Lời giải. Giả sử tam giác $\triangle ABC$ nội tiếp đường tròn đơn vị.



Không mất tính tổng quát, ta chọn $a = 1$, $b = \bar{c}$. Từ giả thiết của bài toán, ta được:

$$m = 0, d = \frac{b+1}{2}, j = \frac{b + 2\bar{b} + 3}{6}\cdot$$

Suy ra

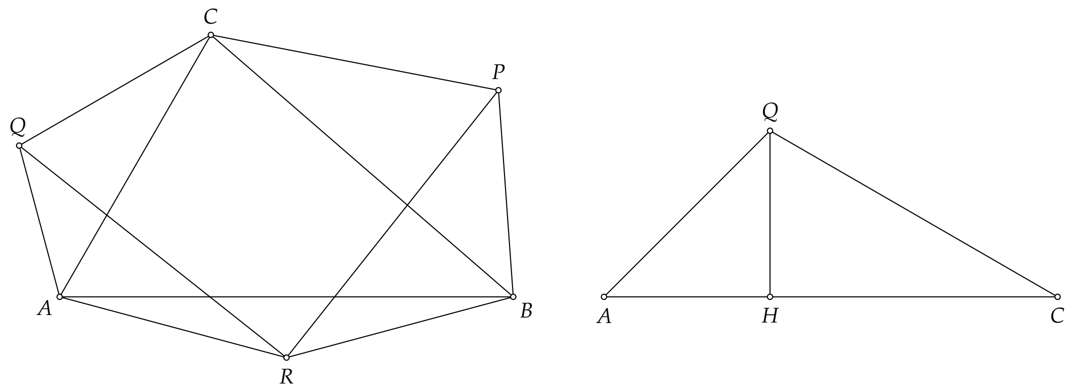
$$\frac{c-d}{\overline{c}-\overline{d}} = \frac{2\overline{b}-b-1}{2b-\overline{b}-1} = \frac{2-b-b^2}{2b^2-b-1} = -\frac{b+2}{2b+1}, \tag{8}$$

$$\frac{j}{\overline{j}} = \frac{b+2\overline{b}+3}{\overline{b}+2b+3} = \frac{b+2}{2b+1}. \tag{9}$$

Từ (8) và (9), ta được (MJ) và (CD) vuông góc nhau. □

Bài toán 4 (*IMO 1975*). *Về phía ngoài của tam giác $\triangle ABC$, lần lượt dựng các tam giác $\triangle ABR$, $\triangle BCP$, $\triangle CAQ$ sao cho $\widehat{PBC} = \widehat{CAQ} = 45^\circ$, $\widehat{BCP} = \widehat{QCA} = 30^\circ$ và $\widehat{ABR} = \widehat{RAB} = 15^\circ$. Chứng minh rằng $\widehat{QRP} = 90^\circ$ và $RQ = RP$.*

Lời giải.



Do phép quay tâm R góc quay -150° biến điểm A thành điểm B nên

$$b = ae^{-\frac{5\pi}{6}i} + (1 - e^{-\frac{5\pi}{6}i})r.$$

Chọn $r = 0$, ta được

$$b = -\frac{\sqrt{3}+i}{2}a.$$

Gọi H là hình chiếu của Q lên đường thẳng (AC). Ta có:

$$QH = AH\tan 45^\circ = HC\tan 30^\circ.$$

Suy ra $(ACH) = -\dfrac{\tan 30^\circ}{\tan 45^\circ} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Do đó, $h = \dfrac{a + \dfrac{\sqrt{3}}{3}c}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{\sqrt{3}a+c}{1+\sqrt{3}}$. Do phép quay tâm H, góc quay -90° biến điểm A thành điểm Q nên ta được

$$q = -ai + (1+i)\frac{\sqrt{3}a+c}{1+\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}-i)a + (1+i)\,c}{1+\sqrt{3}}.$$

Tương tự,

$$p = \frac{(\sqrt{3}+i)b + (1-i)\,c}{1+\sqrt{3}} = \frac{-(1+\sqrt{3}i)a + (1-i)\,c}{1+\sqrt{3}} = -iq.$$

Do đó,

$$p - r = -i(q-r).$$

Suy ra $R_R^{-\pi/2}(Q) = P$.
Do đó, $\widehat{QRP} = 90^\circ$ và $RQ = RP$. □

Bài toán 5 (*IMO 2003*). *Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn. Gọi P, Q, R là chân đường vuông góc của D lên các cạnh $(BC), (CA)$ và (AB). Chứng minh rằng $PQ = QR$ khi hai đường phân giác của góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$ cắt nhau tại một điểm nằm trên (AC).*

Lời giải. Giả sử tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn đơn vị, hai điểm A và C đối xứng nhau qua trục thực. Khi đó, $c = \overline{a}$ hay $ac = 1$. Gọi E, F là 2 điểm có $e = 1$ và $f = -1$. Khi đó, hai điểm E, F nằm trên hai đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ và $\widehat{ADC}$. Không mất tính tổng quát, ta giả sử (BE) là đường phân giác góc $\widehat{ABC}$ và (DF) là đường phân giác góc $\widehat{ADC}$.

Gọi X, Y lần lượt là giao điểm của (AC) với (BE) và (DF). Theo định lí Simson, ba điểm P, Q, R thẳng hàng. Do đó, bài toán tương đương với việc chứng minh X và Y là trùng nhau khi và chỉ khi Q là trung điểm của PR. Nghĩa là ta cần chứng minh

$$x = y \Longleftrightarrow 2q = p + r. \tag{10}$$

Thật vậy, ta có

$$\begin{aligned} x &= \frac{b(a+c) - (b+1)}{b-1}, \\ y &= \frac{d(a+c) + d - 1}{d+1}. \end{aligned}$$

Suy ra,

$$x = y \Longleftrightarrow (b+d)(a+c) = 2(bd+1). \tag{11}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} 2r &= a + b + d - ab\overline{d}, \\ 2p &= b + c + d - bc\overline{d}, \\ 2q &= a + c + d - ac\overline{d}. \end{aligned}$$

Từ đó,

$$\begin{aligned} 2q = p + r &\Longleftrightarrow a + c + d - \overline{d} = \frac{a+b}{2} + b + d - b\overline{d}\frac{a+c}{2} \\ &\Longleftrightarrow (b+d)(a+c) = 2(bd+1). \end{aligned} \tag{12}$$

Từ (11) và (12), ta được đẳng thức (10). □

3 Kết luận và kiến nghị

Sử dụng số phức để giải bài toán hình học là một công cụ mạnh để giải các bài toán về tính thẳng hàng, đồng qui, góc, tổng quát hơn là các bài toán đồng dạng. Tuy nhiên, phương pháp này chỉ giải quyết được những bài toán có chứa số đường tròn ít hơn hoặc bằng 2. Lý do là khi tìm tọa độ giao điểm của nhiều đường tròn thì chúng ta phải giải phương trình phức cấp hai.

Trong chương trình phổ thông, số phức nếu không được dạy cho học sinh thì giáo viên có thể triển khai theo dạng chuyên đề theo hướng.

- Giới thiệu khái niệm và tính chất của số phức, phép toán;
- Giúp học sinh phát hiện mối quan hệ giữa các phép toán trên trường số phức và các phép biến hình chính tắc. Cụ thể, phép cộng tương ứng với phép tịnh tiến, phép liên hợp là phép đối xứng qua trục Ox, phép nhân số phức có mô-đun bằng 1 với số phức là phép quay, phép nhân một số thực dương với số phức là vị tự tâm O;
- Xây dựng phương trình đường thẳng và đường tròn theo ngôn ngữ số phức. Từ đó, phát hiện ra các kết quả hay dùng đối với đa giác đều, đường tròn;
- Vận dụng các kết quả đã xây dựng giải các bài toán từ đơn giản đến phức tạp.

Tài liệu

[1] E. Chen (2016), *Euclidean Geometry in Mathematical Olympiads*, Mathematical Association of America, 1st edition.

[2] Nguyễn Hữu Điển (2000), *Phương pháp số phức và Hình học phẳng*, NXB Đại học quốc gia Hà Nội

[3] M. Radovanović (2007), *Complex Numbers in Geometry*, Olympiad Training Materials, https://www.scribd.com/document/249356193/Marko-Radovanovic-Complex-Numbers-in-Geometry.

[4] K. Y. Li (2004), *Geometry via Complex Numbers*, **9**(1), *Mathematical Excalibur*.

[5] Trần Lê Nam (2018), *Hình học sơ cấp nâng cao*, NXB Đại học Cần Thơ.

PHÂN TÍCH VÀ SO SÁNH ẢNH HƯỞNG CỦA CÁC YẾU TỐ ĐẾN KẾT QUẢ THI KẾT THÚC HỌC PHẦN TOÁN CAO CẤP

Trần Kim Thanh, Trần Thế Vinh, Nguyễn Thị Khánh Tiên
Trường ĐH Giao thông vận tải TP HCM

1 Đặt vấn đề

Từ khi Bộ GD-ĐT bỏ kỳ thi tuyển sinh vào đại học và dùng kết quả thi tốt nghiệp THPT để xét tuyển vào đại học, trong đó môn Toán chuyển sang hình thức thi trắc nghiệm, đã có rất nhiều ý kiến trái chiều về vấn đề này. Là những giáo viên trực tiếp giảng dạy các học phần của Bộ môn Toán ở các trường Đại học, chúng tôi thấy rõ những tác động tiêu cực của vấn đề trên đối với việc học các môn Toán của sinh viên ở môi trường Đại học, đặc biệt là khả năng tư duy độc lập và diễn đạt của các em. Trong bài viết này, với dữ liệu điều tra [11] trên 2834 sinh viên về điểm Toán đầu vào và kết quả học tập môn Toán cao cấp của các khóa 2015-2019 do Phòng Đào tạo và Phòng Khảo thí và Quản lý chất lượng đào tạo của UFM cung cấp, thông qua các mô hình phân tích dữ liệu định tính và định lượng, chúng tôi muốn phân tích và so sánh ảnh hưởng của các yếu tố tác động đến kết quả thi kết thúc học phần Toán cao cấp của các sinh viên ở hai giai đoạn: 2015-2016 (thi tự luận) và 2017-2019 (thi trắc nghiệm).

2 Mô tả và tổng hợp dữ liệu

2.1 Mô tả tập dữ liệu

Tập dữ liệu ở đây là điểm môn toán xét tuyển vào đại học (gọi là điểm đầu vào, ký hiệu X_1), điểm quá trình (ký hiệu X_2) và điểm thi kết thúc học phần Toán cao cấp (ký hiệu Y) của 2834 sinh viên được học bởi 6 giảng viên khác nhau, thuộc các khóa từ 2015 đến 2019 của UFM. Đây là tập dữ liệu chéo gộp độc lập theo thời gian ẩn chứa trong đó một sự kiện đáng quan tâm.Từ năm 2015 cho đến nay, ở Việt Nam, Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam đã bỏ kỳ thi tuyển sinh vào đại học và dùng kết quả thi tốt nghiệp phổ thông trung học để xét tuyển vào các trường đại học. Những năm 2015, 2016 đề thi môn Toán của kỳ thi này là đề tự luận. Từ năm 2017 cho đến nay, Bộ Giáo dục và Đào tạo Việt Nam cho áp dụng hình thức thi trắc nghiệm môn Toán trong kỳ thi tốt nghiệp phổ thông trung học. Có rất nhiều ý kiến trái chiều về sự ảnh hưởng của hình thức thi và xét tuyển này đến chất lượng của sinh viên các trường Đại học. Đặc biệt là việc chuyển từ hình thức thi tự luận sang hình thức thi trắc nghiệm đã khiến cho cả Hội Toán học Việt Nam lúc đó gửi kiến nghị không tán thành [9].

Chính vì điều đó mà chúng tôi chọn tập dữ liệu này để phân tích sự tác động của các yếu tố cơ bản như: (1) điểm đầu vào X_1) (điểm thi tốt nghiệp phổ thông) môn Toán, (2) mức độ chuyên cần và thái độ học tập cùng với một bài kiểm tra (nếu có) được đánh giá qua điểm quá trình X_2 của môn học, (3) yếu tố giảng viên dạy môn Toán cao cấp, ảnh hưởng đến kết quả học môn Toán cao cấp của sinh viên. Kết quả học tập môn Toán cao cấp của sinh viên được đánh giá qua Y là điểm thi kết thúc học phần này của sinh viên. Đặc biệt, qua đó đánh giá ảnh hưởng của việc thay đổi hình thức thi tự luận sang hình thức thi trắc nghiệm môn Toán trong kỳ thi tốt nghiệp phổ thông trung học đối với việc học môn Toán cao cấp của các sinh viên của các trường đại học ở Việt Nam.

2.2 Tổng hợp dữ liệu

Để đơn giản, X_1 được gọi là điểm đầu vào, Y được gọi là điểm đầu ra. Dựa vào dữ liệu có được, để phục vụ cho việc phân tích, đánh giá, trước hết ta phân loại điểm đầu vào môn Toán:

Loại A: $X_1 \in [8, 10]$, loại B: $X_1 \in [7, 8)$, loại C: $X_1 \in [6, 7)$, loại D: $X_1 \in [5, 6)$

Ta gọi mỗi nhóm sinh viên có điểm đầu vào cùng một loại nói trên là một nhóm đầu vào. Để đưa các loại chất lượng đầu vào này vào mô hình phân tích dữ liệu, chúng ta có các biến giả nhị phân K_1, K_2, K_3 đại diện cho loại C, loại B và loại A tương ứng, trong đó loại D được chọn làm thuộc tính cơ sở. Trong bộ dữ liệu này có 6 giảng viên giảng dạy học phần Toán cao cấp, do đó toàn bộ 2834 sinh viên được chia thành 6 nhóm, mỗi nhóm ứng với một giảng viên dạy Toán cao cấp. Để đơn giản ta gọi mỗi nhóm này là một nhóm học tập. Để đưa các nhóm này vào mô hình phân tích dữ liệu, ngoại trừ nhóm thứ 6 được chọn làm thuộc tính cơ sở, 5 nhóm còn lại được đại diện bởi 5 biến giả nhị phân:

$$T_i = \begin{cases} 1, \text{nếu sinh viên thuộc nhóm thứ } i \\ 0, \text{nếu sinh viên thuộc nhóm khác} \end{cases}$$

Việc tuyển sinh vào các trường Đại học ở Việt Nam trong giai đoạn 2015 – 2019 đều dựa vào kết quả điểm thi tốt nghiệp phổ thông trung học, trong đó riêng môn Toán trong thời kỳ này đã có sự thay đổi hình thức thi: giai đoạn các năm 2015, 2016 thi tự luận mà ta gọi một cách đơn giản là giai đoạn thi tự luận, giai đoạn từ năm 2017 đến năm 2019 thi trắc nghiệm mà ta gọi là giai đoạn thi trắc nghiệm. Vì vậy chúng ta chia dữ liệu thành hai mẫu: Mẫu dữ liệu giai đoạn thi tự luận và mẫu dữ liệu giai đoạn thi trắc nghiệm. Hai mẫu này đều là các mẫu dữ liệu chéo gộp độc lập. Để đưa tác động của thời điểm hoặc giai đoạn vào mô hình phân tích, đối với giai đoạn thi tự luận, ta dùng biến giả nhị phân Z và đối với giai đoạn thi trắc nghiệm ta dùng hai biến giả nhị phân Z_1, Z_2 như sau

$$Z = \begin{cases} 1, \text{nếu sinh viên khóa 2016} \\ 0, \text{nếu sinh viên khóa 2016} \end{cases}$$

$$Z_1 = \begin{cases} 1, \text{nếu sinh viên khóa 2018} \\ 0, \text{nếu sinh viên khóa khác} \end{cases}$$

$$Z = \begin{cases} 1, \text{nếu sinh viên khóa 2019} \\ 0, \text{nếu sinh viên khóa khác} \end{cases}$$

giữa hai giai đoạn thi tự luận và thi trắc nghiệm, ta dùng một trong hai biến giả nhị phân:

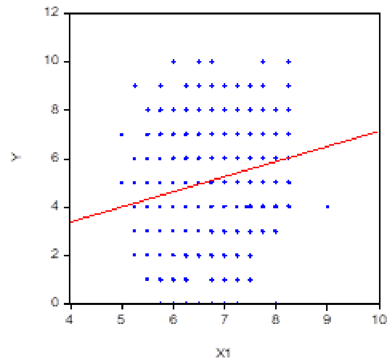
$$\delta = \begin{cases} 1, \text{cho sinh viên gia đoạn thi trắc nghiệm} \\ 0, \text{cho sinh viên giai đoạn thi tự luận} \end{cases}$$

$$\delta_1 = \begin{cases} 1, \text{cho sinh viên khóa 2017} \\ 0, \text{cho sinh viên khóa 2016} \end{cases}$$

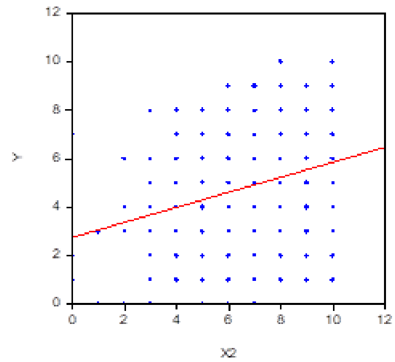
Khi đó toàn bộ dữ liệu [10] được tổng hợp bởi bảng tổng hợp dữ liệu [.].

2.3 Một số nhận xét ban đầu

Trước hết từ các biểu đồ phân tán (F.1) và (F.2) của Y (điểm môn Toán cao cấp) theo X1 (điểm đầu vào môn toán) và của Y theo X2 (điểm quá trình môn Toán cao cấp) trong giai đoạn 2015 – 2016, có một xu thế tăng nhẹ của Y theo X1 và theo X2, tức là những sinh viên có điểm đầu vào cao hơn hoặc điểm quá trình cao hơn thì nói chung sẽ có điểm môn Toán cao cấp cao hơn. Xu thế tăng của Y theo X1 và xu thế tăng của Y theo X2 là xấp xỉ nhau

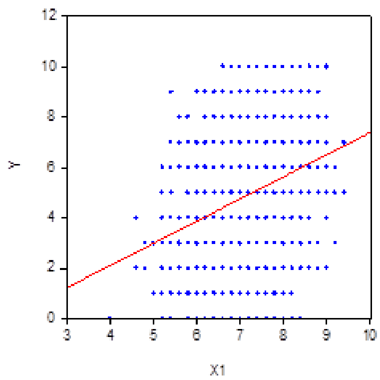


F.1. The scatter graphic of Y follows X1 (2015-2016)

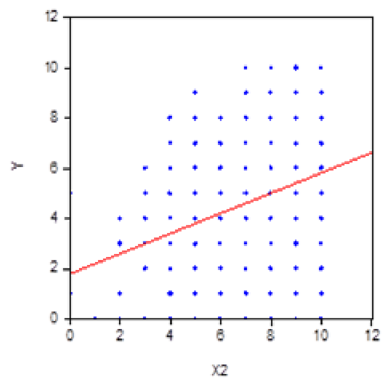


F.2. The scatter graph of Y follows X2 (2015-2016)

Tiếp tục khảo sát các biểu đồ phân tán của Y (điểm môn Toán cao cấp) theo X1 (điểm đầu vào môn toán) (F.3) và của Y theo X2 (điểm quá trình môn Toán cao cấp) (F.4) trong giai đoạn 2017 – 2019:



F.3. The scatter graphic of Y follows X1 (2017-2019)



F.4. The scatter graphic of Y follows X2 (2017-2019)

Các biểu đồ này đều biểu hiện xu thế tăng của Y theo X1 và theo X2, tức là những sinh viên có điểm toán đầu vào cao hơn hoặc điểm quá trình cao hơn thì nói chung sẽ có điểm môn Toán cao cấp cao hơn. Xu thế tăng của Y theo X1 và xu thế tăng của Y theo X2 là xấp xỉ nhau. Các hình trên cũng cho thấy một biểu hiện bất thường: trong số các sinh viên có kết quả thi kết thúc học phần môn Toán cao cấp không quá 4 điểm, có khá nhiều sinh viên có điểm đầu vào môn Toán từ 7 điểm trở lên, thậm chí còn trên 9 điểm và cũng khá nhiều sinh viên có điểm quá trình môn Toán cao cấp từ 7 trở lên thậm chí là 10 điểm. Điều này khiến ta phải quay lại dữ liệu để tìm hiểu chi tiết hơn về điều này.

Trở về dữ liệu của giai đoạn 2017 – 2019, có thể chỉ ra cụ thể hơn: trong tổng số 768 sinh viên có điểm đầu ra không quá 4 điểm: - Có đến 399 sinh viên có điểm thi đầu vào không dưới 7 (chiếm tỷ lệ 51,95- Có 574 sinh viên có điểm quá trình môn Toán cao cấp từ 7 trở lên (chiếm tỷ lệ 74,74

Như vây sự bất thường nói trên của giai đoạn thi trắc nghiệm còn nghiêm trọng hơn nhiều so với giai đoạn thi tự luận. Chúng ta sẽ tiếp tục tìm hiểu mối quan hệ giữa điểm đầu ra đối với các yếu tố: điểm đầu vào, điểm quá trình, giảng viên thông qua các mô hình hồi quy dữ liệu chéo gộp. Các mẫu dữ liệu thu được của mỗi giai đoạn và gộp của cả hai giai đoạn đều là các mẫu dữ liệu chéo gộp độc lập. Do đó để phân tích sự tác động của các yếu tố điểm đầu vào, điểm quá trình và yếu tố giảng viên đến điểm thi kết thúc học phần môn Toán cao cấp, mô hình dữ liệu chéo gộp theo thời gian là thích hợp cho mỗi giai đoạn và việc gộp cả hai giai đoạn. Chúng tôi sẽ phân tích mối quan hệ nói trên thông qua các mô hình hồi quy dữ liệu chéo gộp theo thời gian. Đặc biệt, qua đó chúng tôi muốn so sánh kết quả phân tích hồi quy của hai giai đoạn này để đánh giá tác động của sự thay đổi hình thức thi từ tự luận sang trắc nghiệm.

3 Phân tích trên tập dữ liệu 2015-2016 (thi tự luận)

Trước hết, từ dữ liệu, ta muốn tìm hiểu xem chất lượng đầu vào của các nhóm học tập có thực sự khác nhau hay không. Kết quả phân tích ANOVA một nhân tố (nhân tố giảng viên, với 6 mức khác nhau) về điểm đầu vào môn toán, nhận được

$$F = 17,36211 > F_{crit} = 2,2224(P - value = 0,0000\dots).$$

Do đó ta cho rằng có sự khác nhau về chất lượng đầu vào giữa các nhóm này. Một cách chi tiết, từ dữ liệu, chúng ta có bảng thống kê tỷ lệ các mức chất lượng đầu vào của các nhóm học tập. Mỗi ô của bảng (trừ hàng đầu và cột đầu) chứa chỉ số tỷ lệ tính trong mỗi nhóm tương ứng.

Chất lượng đầu vào	Nhóm 1	Nhóm 2	Nhóm 3	Nhóm 4	Nhóm 5	Nhóm 6
Loại A	1.59%	5.62%	4.04%	2.07%	2.24%	6.06%
Loại B	31.22%	59.55%	56.57%	29.79%	34.33%	38.10%
Loại C	57.14%	31.46%	36.36%	58.11%	52.98%	47.62%
Loại D	10.05%	3.37%	3.03%	10.03%	10.45%	8.22%
Tổng số	189	89	99	339	134	231

Đồng thời dựa vào kết quả phân tích ANOVA một nhân tố (nhân tố giảng viên với 6 mức khác nhau) về điểm đầu ra, nhận được: $F = 12,68 > F_{crit} = 2,61$. Do đó ta cho rằng có sự khác nhau về chất lượng đầu ra của các nhóm học tập. - Xét chất lượng đầu vào của mỗi nhóm học tập trong cả giai đoạn 2015 – 2016, thông qua mô hình hồi quy của điểm đầu vào X_1 theo các biến giả T_1, T_2, T_3, T_4, T_5:

$$X_1 = h_0 + h_1.T_1 + h_2.T_2 + h_3.T_3 + h_4.T_4 + h_5.T_5 + U$$

Từ tập dữ liệu 2015-2016, nhận được điểm trung bình đầu vào của cả giai đoạn này là $\bar{X}_1 = 6,71$ và mô hình ước lượng: $X_1 = 6,79 - 0,2.T_1 + 9,25.T_2 + 0,11.T_3 - 0,21.T_4 - 0,12.T_5 + U$ Kết quả chạy hồi quy ước lượng cho thấy: Điểm trung bình đầu vào của cả giai đoạn thi tự luận là 6,71 điểm. Điểm trung bình đầu vào của các nhóm học tập theo thứ tự từ nhóm 1 đến nhóm 6 lần lượt là: $\hat{h_0} + \hat{h_1} = 6,6; \hat{h_0} + \hat{h_2} = 7,04; \hat{h_0} + \hat{h_3} = 6,91; \hat{h_0} + \hat{h_4} = 6,59; \hat{h_0} + \hat{h_5} = 6,67; \hat{h_0} = 6,68$ Như vậy nhóm học tập có điểm trung bình đầu vào cao nhất là nhóm 2 (7,04), tiếp đến là nhóm 3 (6,91), nhóm 6 (6,68), nhóm 5 (6,67), và thấp nhất là nhóm 4 (6,59)

- Xét chất lượng đầu ra của mỗi loại chất lượng đầu vào trong cả giai đoạn 2015 – 2016, thông qua mô hình hồi quy của điểm đầu ra Y theo các biến giả K_1, K_2, K_3:

$$Y = a + b.K_1 + c.K_2 + d.K_3 + V$$

Từ tập dữ liệu 2015-2016, nhận được điểm trung bình đầu ra của cả giai đoạn này là Y=5,09 và mô hình ước lượng: $Y = 4,37 + 0,55.K_1 + 1,04.K_2 + 1,46.K_3 + V$ Từ đó cho thấy: Điểm thi kết thúc học phần môn Toán cao cấp của toàn bộ 1081 sinh viên trong 2 khóa 2015, 2016 là: 5,09, trong đó:

- Nhóm đầu vào loại D có trung bình điểm đầu ra là: 4,37, nhóm đầu loại C có trung bình điểm đầu ra là: 4,92, nhóm đầu vào loại B có trung bình điểm đầu ra là: 5,41, nhóm đầu vào loại A có trung bình điểm đầu ra là: 5,83

Như vậy điểm thi kết thúc học phần Toán cao cấp trung bình mỗi nhóm chất lượng đầu vào mặc dù có sự khác nhau (theo kết quả ANOVA phần trước), nhưng chúng cũng chỉ dao động nhỏ xung quanh điểm trung bình thi kết thúc học phần Toán cao cấp của tất cả các nhóm chất lượng đầu vào. Kể cả nhóm chất lượng đầu vào loại A cũng không có khả năng bứt phá đáng kể xung quanh mức bình quân chung là 5,09. Điều này cho thấy đề thi tốt nghiệp phổ thông trung học môn toán chưa thực sự phân loại được chất lượng học sinh, thậm chí có những học sinh đạt điểm cao (loại A) mà kết quả thi kết thúc học phần Toán cao cấp lại dưới mức trung bình. Mặt khác điểm quá trình trong nhiều trường hợp chưa đánh giá đúng thực chất của chất lượng đầu ra, bằng chứng là trong số 407 sinh viên có điểm đầu ra không quá 4 thì có tới 69,79% sinh viên có điểm quá trình không dưới 7, thậm chí trong số đó có sinh viên có điểm quá trình là 10.

Tiếp theo ta muốn tìm hiểu chất lượng đầu ra ở các nhóm học tập này. Tiến hành ước lượng cho mô hình: $Y = k_0 + k_1.T_1 + k_2.T_2 + k_3.T_3 + k_4.T_4 + k_5.T_5 + W$ Nhận được mô hình ước lượng: $\hat{Y} = 4,85 - 0,18.T_1 + 0,24.T_2 + 0,73.T_3 + 0,01.T_4 + 1,42.T_5$ Theo đó điểm trung bình đầu ra của các nhóm học tập xếp theo thứ tự giảm dần như sau: cao nhất là nhóm (5) (6,28), thứ 2 là nhóm (3) (5,59), thứ 3 là nhóm (2) (5,09), thứ tư là nhóm (4) (4,86), thứ năm là nhóm (6) (4,85), thứ sáu là nhóm (1) (4,67)

- So sánh điểm đầu ra của các nhóm học tập có cùng mức độ điểm đầu vào, thông qua mô hình hồi quy của Y theo $T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, K_1, K_2, K_3$:

$$Y = p_0 + p_1T_1 + p_2T_2 + p_3T_3 + p_4T_4 + p_5T_5 + q_1K_1 + q_2K_2 + q_3K_3 + \theta$$

ta nhận được mô hình ước lượng:

$$\hat{Y} = 4,1 - 0,1T_1 + 0,11T_2 + 0,64T_3 + 0,1T_4 + 1,49T_5 + 0,56K_1 + 1,03K_2 + 1,51K_3$$

Từ tập dữ liệu của giai đoạn 2015 – 2016 và các kết quả phân tích trên ta rút ra một số thông tin hữu ích sau đây đối với các nhóm học học tập để giúp cho việc đánh giá, so sánh hiệu quả học tập giữa các nhóm này được chính xác và khách quan hơn:

Bảng 1

Nhóm học tập	Trung bình đầu ra của các nhóm đầu vào							
	A		B		C		D	
	Điểm	Thứ hạng	Điểm	Thứ hạng	Điểm	Thứ hạng	Điểm	Thứ hạng
(1)	5,52	6	5,04	6	4,57	6	4,01	6
(2)	5,73	3	5,24	3	4,78	3	4,22	3
(3)	6,25	2	5,77	2	5,3	2	4,74	2
(4)	5,71	4	5,23	4	4,76	4	4,20	4
(5)	7,1	1	6,62	1	6,15	1	5,59	1
(6)	5,61	5	5,13	5	4,66	5	4,10	5

Bảng 2.

Nhóm học tập	Trung bình đầu vào		Tỷ lệ đầu vào các loại (%)				Trung bình đầu ra	
	Điểm số	Thứ hạng	A	B	C	D	Điểm số	Thứ hạng
(1)	6,60	5	1,59	31,22	57,14	10,05	4,67	6
(2)	7,04	1	5,62	59,55	31,46	3,37	5,09	3
(3)	6,91	2	4,04	56,57	36,36	0,03	5,59	2
(4)	6,59	6	2,07	29,79	58,11	10,03	4,86	4
(5)	6,67	4	2,24	34,33	52,98	10,45	6,28	1
(6)	6,68	3	6,06	38,10	47,62	8,22	4,85	5

4 Phân tích trên tập dữ liệu 2017-2019 (thi trắc nghiệm)

Từ dữ liệu của giai đoạn 2017 - 2019, có bảng thống kê dưới đây về tỷ lệ các loại chất lượng đầu vào trong các nhóm học tập.

Chất lượng đầu vào	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
Loại A	25.81%	42.47%	21.40%	23.36%	15.40%	6.38%
Loại B	34.84%	40.86%	54.39%	45.45%	40.35%	32.45%
Loại C	33.54%	12.37%	22.10%	26.64%	35.75%	47.34%
Loại D	5.81%	4.30%	2.11%	4.55%	8.50%	13.83%
Tổng số	155	186	285	374	565	188

Bảng này cho thấy, loại trừ nhóm 6 thì tỷ lệ đầu loại C và loại A trong các nhóm học tập trong giai đoạn này tăng lên rất nhiều so với giai đoạn 2015 – 2016. Nếu chỉ căn cứ vào điều này, ta dễ nhầm tưởng rằng chất lượng đầu vào của trường đại học trong giai đoạn sau này đã được cải thiện đáng kể so với giai đoạn 2015 – 2016. Tuy nhiên, như đã trình bày ở phần trươc, các biểu hiện bất thường đã được bộc lộ trong các biểu đồ phân tán F.3, F.4 . Chúng ta tiếp tục làm rõ điều này trong các nội dung dưới đây. Tương tự như giai đoạn 2015 – 2016, đối với phân tích ANOVA cho X1 theo nhân tố giáo viên, ta nhận được $F = 31,7355 > F_{crit} = 2,2192$, đối với phân tích ANOVA cho Y theo nhân tố giáo viên ta nhận được $F = 31,7355 > F_{crit} = 2,2192$ và đi đến kết luận: chất lượng điểm đầu vào của các nhóm học tập là khác nhau và chất lượng điểm đầu ra của các nhóm học tập cũng khác nhau.

- Xét chất lượng đầu vào của mỗi nhóm học tập trong cả giai đoạn 2017 – 2019, thông qua mô hình hồi quy của điểm đầu vào X_1 theo các biến giả T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 :

$$X_1 = l_0 + l_1.T_1 + l_2.T_2 + l_3.T_3 + l_4.T_4 + l_5.T_5 + U'$$

Từ dữ liệu 2017-2019, có $\bar{X}_1 = 7,19$ và mô hình ước lượng

$$\hat{X_1} = 6,7 + 0,54.T_1 + 0,94.T_2 + 0,66.T_3 + 0,57.T_4 + 0,36.T_5$$

Từ đó điểm trung bình đầu vào của các khóa 2017-2019 là 7,19 và của các nhóm học tập, theo thứ tự từ nhóm 1 đến nhóm 6 lần lượt là: 7,24,7,64,7,36,7,27, 7,06,6,7, Như vậy nhóm học tập có điểm trung bình đầu vào cao nhất là nhóm (2) (7,64), thứ 2 là nhóm (3) (7,36), thứ 3 là nhóm (4) (7,27), thứ 4 là nhóm (1) (7,24), thứ 5 là nhóm (5) (7,06), thứ 6 là nhóm (6) (6,7). Nhìn chung điểm đầu vào giai đoạn này cao hơn giai đoạn 2015 – 2016. - Xét chất lượng đầu ra của mỗi loại chất lượng đầu vào trong cả giai đoạn 2017 – 2019, thông qua mô hình hồi quy của điểm đầu ra Y theo các biến giả K_1, K_2, K_3 :

$$Y = a' + b'.K_1 + c'.K_2 + d'.K_3 + V'$$

Từ tập dữ liệu có: $\bar{Y} = 4.95$ và mô hình ước lượng: $\hat{Y} = 3,61 + 0,69.K_1 + 1,61.K_2 + 2,17.K_3$

Kết quả hồi quy ước lượng này cho thấy: Điểm trung bình đầu ra của các nhóm chất lượng đầu vào xếp theo thứ tự từ cao xuống thấp là: 5,78 (loại A), 5,22(loại B), 4,29 (loại C), 3,61 (loại D). Kết quả trên cũng chỉ ra: Điểm trung bình đầu ra của cả giai đoạn thi trắc nghiệm là 4,95, thấp hơn so với giai đoạn thi tự luận, trong khi điểm đầu vào của giai đoạn thi trắc ngiệm lại cao hơn so với giai đoạn thi tự luận. Đầu ra của các nhóm chất lượng đầu vào cũng rơi vào tình trạng này.

- Xét chất lượng đầu ra của mỗi nhóm học tập trong cả giai đoạn 2017 – 2019, thông qua mô hình hồi quy của điểm đầu ra Y theo các biến giả T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 :

$$Y = m_0 + m_1.T_1 + m_2.T_2 + m_3.T_3 + m_4.T_4 + m_5.T_5 + W'$$

nhận được mô hình ước lượng: $\hat{Y} = 4,63 - 0,11.T_1 + 0,96.T_2 + 0,93.T_3 - 0,76.T_4 + 0,74.T_5$

Điểm trung bình đầu ra của các nhóm học tập theo thứ tự là: 4,52,5,6, 5,56,3,87,5,37,4,63

Từ các kết quả phân tích trên ta có bảng đánh giá đối với các nhóm học Toán cao cấp như sau:

Nhóm học tập	Trung bình đầu vào		Tỷ lệ đầu vào các loại (%)				Trung bình đầu ra	
	Điểm số	Thứ hạng	A	B	C	D	Điểm số	Thứ hạng
(1)	7,24	4	21,81	34,84	33,54	5,81	4,52	5
(2)	7,64	1	42,47	40,86	12,37	4,30	5,6	1
(3)	7,36	2	21,40	54,39	22,10	2,11	5,56	2
(4)	7,27	3	23,36	45,45	26,64	4,55	3,87	6
(5)	7,06	5	15,40	40,35	35,75	8,50	5,37	3
(6)	6,70	6	6,38	32,45	47,34	13,83	4,63	4

- Để phân tích sự tác động của của các yếu tố điểm đầu vào, điểm quá trình, các nhóm học tập ảnh hưởng đến đầu ra là kết quả thi kết thúc học phần Toán cao cấp, ta xét mô hình dữ liệu chéo gộp theo thời gian dưới đây cho giai đoạn này:

$$Y = p_0 + p_1.Z_1 + p_2.Z_2 + q_1X_1 + q_1'.Z_1.X_1 + q_1''.Z_2.X_1 + q_2X_2 + q_2'.\delta_1.X_2 + q_2''.\delta_2.X_2$$
$$+s_1T_1 + s_2T_2 + s_3T_3 + s_4T_4 + s_5T_5 + \epsilon'$$

Từ tập dữ liệu, nhận được mô hình ước lượng

$$\hat{Y} = -3,34 - 2,1.Z_1 - 2,99.Z_2 + 0,58.X_1 + 0,23.Z_1.X_1 + 0,37.Z_2.X_1 + 0,41.X_2$$
$$+0,08.\delta_1.X_2 + 0,11.\delta_2.X_2 + 1,02.T_1 + 0,6T_2 + 1,57.T_3 + 0,03T_4 + 0,84T_5$$

Mô hình hồi quy ước lượng nhận được cho thấy ảnh hưởng của điểm quá trình đối với kết quả thi kết thúc học phần Toán cao cấp qua các năm đều thấp hơn so với ảnh hưởng của điểm đầu vào. Đối với khóa 2017, hệ số X_1 là 0,58, hệ số X_2 là 0,41. Đối với khóa 2018, hế số X_1 là 0,81, hệ số X_2 là 0,5. Đối với khóa 2019, hệ số X_1 là 0,95, hệ số X_2 là 0,53. Ảnh hưởng tích cực của yếu tố giảng viên đến kết quả thi kết thúc học phần Toán cao cấp thông qua các nhóm học tập được xếp thứ tự từ cao xuống thấp như sau: Cao nhất là nhóm (3), tiếp đến là nhóm (1), rồi nhóm (2), rồi nhóm (5), rồi nhóm (4) và cuối cùng là nhóm (6).

5 Phân tích trên tập dữ liệu 2015-2019 (mẫu gộp hai giai đoạn tự luận và trắc nghiệm)

5.1 Một số nhận xét qua phân tích từng giai đoạn

Qua việc phân tích từng giai đoạn, ta nhận thấy rằng: - Cả hai giai đoạn đều có chung một biểu hiện bất thường: có nhiều sinh viên có điểm đầu vào hoặc điểm quá trình từ 7 trở lên, nhưng lại có điểm thi kết thúc học phần Toán cao cấp không vượt quá 4. Dấu hiệu bất thường này ở giai đoạn sau còn nghiêm trọng hơn nhiều so với giai đoạn trước. - Chất lượng đầu ra chưa tương xứng vớ điểm đầu vào và điểm quá trình. - Các nhóm học tập có điểm đầu vào trong giai đoạn 2017 - 2019 cao hơn hẳn so với trong giai đoạn 2015 – 2016, nhưng điểm đầu ra thì ngược lại. Hơn nữa tỷ lệ đầu vào loại A, loại B trong các nhóm này ở giai đoạn sau cao hơn nhiều so với giai đoạn trước. - Ảnh hưởng của các giảng viên thông qua các nhóm học tập có sự thay đổi trong hai giai đoạn. Chúng ta sẽ thấy rõ hơn những vấn đề trên trong các mô hình hồi quy gộp hai giai đoạn.

5.2 Phân tích trên mẫu dữ liệu chéo gộp 2016 – 2017

- Xét mô hình hồi quy dữ liệu chéo gộp theo thời gian của X_1 theo các biến Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, Z_5:

$$X_1 = d_0 + d_1.\delta_1 + \Sigma_(j = 1)^5 c_j.T_j + U^*$$

Từ bộ dữ liệu, nhận được $\bar{X_1} = 7,01$ và mô hình ước lượng

$$\hat{X_1} = 6,46 + 1,1.\delta_1 + 0,02.T_1 + 0,09.T_2 + 0,13.T_3 + 0,04.T_4 + 0,21.T_5$$

Kết quả này cho thấy điểm trung bình đầu vào cho cả hai năm này khá cao (7,01), trong đó điểm trung bình đầu vào của các nhóm học tập khá đồng đều (các hệ số hồi quy ước lượng của các biến T_j khác nhau không đáng kể). So với năm 2016, trong năm 2017 điểm trung bình đầu vào của các nhóm đều tăng 1,10 điểm. - Xét mô hình hồi quy dữ liệu chéo gộp của X_1 theo các biến K_1, K_2, K_3:

$$X_1 = e_0 + e_1.\delta_1 + \theta_1.K_1 + \theta_2.K_2 + \theta_3.K_3 + \Theta$$

- Tiến hành ước lượng cho mô hình trên, nhận được:

$$\hat{X_1} = 5,56 + 0,16.\delta_1 + 0,84.K_1 + 1,72.K_2 + 2,57.K_3$$

Kết quả này chỉ ra điểm bình quân đầu vào các mức chất lượng loại A, loại B, loại C, loại D của khoá 2017 đều cao hơn 0,1631 điểm so với khóa 2016.

- Xét mô hình hồi quy dữ liệu chéo gộp của Y theo các biến T_1, T_2, T_3, T_4, T_5

$$Y = \mu_0 + \mu_1.\delta_1 + \eta_1.T_1 + \eta_2.T_2 + \eta_3.T_3 + \eta_4.T_4 + \eta_5.T_5 + V^*$$

nhận được $\bar{Y} = 4,91$ và mô hình ước lượng:

$$\hat{Y} = 4,46 - 0,48.\delta_1 + 0,43.T_1 - 0,02.T_2 + 1,36.T_3 + 0,38.T_4 + 1,81.T_5$$

Kết quả này cho thấy: - Điểm trung bình đầu ra của sinh viên cả hai khóa 2016, 2017 là 4,91, điểm trung bình đầu ra của các nhóm học tập khóa 2017 đều thấp hơn gần nửa điểm (0,48) so với khóa 2016. - Xét mô hình hồi quy dữ liệu chéo gộp của Y theo K_1, K_2, K_3 :

$$Y = d'_0 + d'_1.\delta_1 + c'_1.K_1 + c'_2.K_2 + c'_3.K_3 + \epsilon^*$$

nhận được mô hình ước lượng: $\hat{Y} = 4,3 - 1,17.\delta_1 + 0,6.K_1 + 1,51.K_2 + 2,02.K_3$

Kết quả này chứng tỏ: điểm trung bình đầu ra của các nhóm chất lượng đầu vào của khóa 2017 đều thấp thua 1,17 điểm so với khóa 2016. Thậm chí nhóm chất lượng đầu vào loại A của khóa 2017 cũng chỉ đạt điểm trung bình đầu ra là 5,15, còn nhóm chất lượng đầu vào loại B của khóa này có điểm trung bình đầu ra là 4,65, thấp hơn cả điểm trung bình đầu ra của nhóm đầu vào loại C khóa 2016 là 4,9. - Bây giờ ta xem xét sự tác động của tất cả các yếu tố: X1, X2 và yếu tố giảng viên vào kết quả thi kết thúc học phần là Y trong cả hai khóa 2015, 2016. Khi tác động yếu tố thời gian δ_1 lên cả hệ số chặn và các hệ số hồi quy của X_1 và X_2 nhận được các hệ số hồi quy ước lượng của $\delta_1.X_1$ và của $\delta_1.X_2$ khác không không đáng kể

($\delta_1.X_1$ có Prob.(t) = 0,3413, $\delta_1.X_2$ có Prob.(t) = 0,2275), tức là yếu tố thời gian tác động không đáng kể lên yếu tố điểm đầu vào và điểm quá trình. Vì vậy ta xem xét mô hình hồi quy ước lượng cho hồi quy dữ liệu chéo gộp mà yếu tố thời gian chỉ tác động lên hệ số chặn sau đây:

$$Y = \alpha_0 + \alpha_1.\delta_1 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \Sigma_{j=1}^{5}\gamma_j T_j + W^*$$

ta nhận được mô hình ước lượng:

$$\hat{Y} = -3,51 - 1,13.\delta_1 + 0,6.X_1 + 0,44.X_2 + 1,86.T_1 + 0,98.T_2 + 2,41.T_3 + 1,46.T_4 + 1,89T_5$$

Kết quả này cho thấy, trong cả hai khóa 2016, 2017, đối với điểm đầu ra Y, ảnh hưởng của điểm quá trình yếu hơn ảnh hưởng của điểm đầu vào. Trong cùng một điều kiện về điểm đầu vào và điểm quá trình thì đối với kết quả điểm thi kết thúc học phần toán cao cấp, yếu tố giáo viên có ảnh hưởng tích cực nhất là nhóm 3, tiếp đến là nhóm 5, rồi nhóm 1, nhóm 4, nhóm 2 và cuối cùng là nhóm 6. Đặc biệt, trong điều kiện đó, điểm trung bình đầu ra của khóa 2017 thấp hơn so với điểm trung bình của khóa 2016 là 1,13 điểm.

5.3 Phân tích trên dữ liệu chéo gộp cả hai giai đoạn 2015-2016 và 2017-2019.

Bây giờ bộ dữ liệu chéo gộp cả hai giai đoạn thi tự luận và thi trắc nghiệm được sử dụng để ước lượng cho các mô hình hồi quy.

1. Ước lượng cho mô hình hồi quy dữ liệu chéo gộp của X_1 theo các biến T_1, T_2, T_3, T_4, T_5

   $$X_1 = d_0^* + d_1^*.\delta + c_1^*.T_1 + c_2^*.T_2 + c_3^*.T_3 + c_4^*.T_4 + c_5^*.T_5 + U_1$$

   nhận được : $\bar{X}_1 = 7,01$ và mô hình ước lượng:

   $$\hat{X_1} = 6,55 + 0,45.\delta + 0,13.T_1 + 0,59.T_2 + 0,36.T_3 + 0,16.T_4 + 0,07.T_5$$

   Kết quả này cho thấy điểm trung bình đầu vào tất cả các khóa của cả hai giai đoạn khá cao (7,01 điểm). Điểm trung bình đầu vào của các nhóm học tập có sự khác nhau: cao nhất là nhóm 2, tiếp theo là nhóm 3, rồi nhóm 4, nhóm 1, nhóm 5, cuối cùng là nhóm 6. Đáng chú ý là mỗi nhóm học tập trong giai đoạn 2017-2019 đều có điểm trung bình đầu vào cao hơn 0,45 điểm so với trong giai đoạn 2015 - 2016.

2. Tiến hành ước lượng cho mô hình hồi quy dữ liệu chéo gộp của X_1 theo các biến K_1, K_2, K_3 :

   $$X_1 = g_0 + g_1.\delta + \omega_1.K_1 + \omega_2.K_2 + \omega_3.K_3 + \Theta'$$

   nhận được mô hình ước lượng:

   $$\hat{X_1} = 5,53 + 0,1.\delta + 0,87.K_1 + 1,75.K_2 + 2,65.K_3$$

   Như vậy điểm bình quân đầu vào của các khóa thi trắc nghiệm đều cao hơn 0,10 điểm so với các khóa thi tự luận trong tất cả các loại chất lượng.

3. Tiến hành ước lượng cho mô hình hồi quy dữ liệu chéo gộp của Y theo T_1, T_2, T_3, T_4, T_5 :

$$Y = \mu_0^* + \mu_1^*.\delta + \eta_1^*.T_1 + \eta_2^*.T_2 + \eta_3^*.T_3 + \eta_4^*.T_4 + \eta_5^*.T_5 + V_1$$

nhận được: $\bar{Y} = 5,00$ và mô hình ước lượng:

$$\hat{Y} = 4,96 - 0,46.\delta - 0,15.T_1 + 0,78.T_2 + 0,95.T_3 - 0,38.T_4 + 0,96.T_5$$

Từ đó nhận thấy: - Điểm trung bình đầu ra của sinh viên tất cả các khóa 2015 – 2019 là 5,00. - Điểm trung bình đầu ra của các nhóm học tập của các khóa 2017 - 2019 đêu thấp hơn gần nửa điểm (0,46 điểm) so với các khóa 2015 – 2016. - Xét trong toàn bộ hai giai đoạn, điểm trung bình đầu ra cao nhất là của nhóm 5, rồi nhóm 3, nhóm 2, nhóm 6, nhóm 1 và cuối cùng là nhóm 4. Tuy nhiên trong các khóa 2017 – 2019, điểm trung bình đầu ra của nhóm 5 cũng chỉ là 5,45 điểm.

4. Với lý do tương tự như trong giai đoạn 2016 – 2017, khi gộp cả hai giai đoạn thi tự luận và thi trắc nghiệm, chúng tôi chỉ xét ước lượng cho mô hình hồi quy dữ liệu chéo gộp (3.9) của Y theo các biến $X_1, X_2, T_1, T_2, \ldots, T_5$, mà trong đó biến thời gian δ giữa hai giai đoạn chỉ tương tác với hệ số chặn:

$$Y = \alpha_0^* + \alpha_1^*.\delta + \beta_1^*.X_1 + \beta_2^*.X_2 + \Sigma_{j=1}^5 \gamma_j^*.T_j + W_1$$

nhận được mô hình ước lượng:

$$\hat{Y} = -3,8 - 0,75.\delta + 0,68.X_1 + 0,45.X_2 + 1,26.T_1 + 1,05.T_2 + 2.T_3 + 0,7.T_4 + 1,36.T_5$$

Kết quả này cho thấy, trong cả hai giai đoạn 2015 – 2016 và 2017 - 2019, đối với điểm đầu ra Y, ảnh hưởng của điểm quá trình yếu hơn ảnh hưởng của điểm đầu vào. Trong cùng một điều kiện về điểm đầu vào và điểm quá trình thì đối với kết quả điểm thi kết thúc học phần toán cao cấp, yếu tố giáo viên có ảnh hưởng tích cực nhất là nhóm 3, tiếp đến là nhóm 5, rồi nhóm 1, nhóm 2, nhóm 4 và cuối cùng là nhóm 6. Đặc biệt, trong điều kiện đó, điểm trung bình đầu ra của các khóa 2017 - 2019 thấp hơn so với điểm trung bình của các khóa 2015-2016 là 0,75 điểm.

5. Tiến hành ước lượng cho mô hình hồi quy dữ liệu chéo gộp của Y theo các biến giả K_1, K_2, K_3

$$Y = v_0 + v_1.\delta + r_1.K_1 + r_2.K_2 + r_3.K_3 + U_1'$$

ta có mô hình ước lượng:

$$\hat{Y} = 4,18 - 0,42.\delta + 0,64.K_1 + 1,38.K_2 + 1,99.K_3$$

Kết quả này cho thấy: cùng một mức chất lượng đầu vào, dù là loại A, loại B, loại C hay loại D thì điểm trung bình thi kết thúc học phần Toán cao cấp của sinh viên các khóa 2017 – 2019 đều kém thua sinh viên các khóa 2016 – 2017 khoảng 0,42 điểm.

5.4 Phân tích qua mô hình phân tích định tính

Vấn đề đặt ra rong mục này là: Với một điểm đầu vào và một quá trình học tập đã trải qua, khả năng thi đạt yêu cầu môn Toán cao cấp của một sinh viên là chừng bao nhiêu? chúng ta sẽ xem xét tác động của các yếu tố: điểm Toán đầu vào, điểm quá trình, giảng viên giảng dạy học phần Toán cao cấp, tác động lên kết quả thi môn Toán cao cấp. Cụ thể ta muốn biết xác suất π để một sinh viên có điểm thi môn Toán cao cấp là đạt phụ thuộc như thế nào vào các yếu tố nói trên. Như vậy biến phụ thuộc (đáp ứng) là một biến định tính có hai thuộc tính: đạt và không đạt. Với mục đích đó, chúng ta đưa vào biến giả nhị phân Y*, được gán giá trị 0, nếu $Y < 5$ (không đạt) và được gán giá trị 1, nếu $Y \geq 5$ (đạt). Ngoài ra coi 6 giảng viên trong mẫu đại diện cho các giảng viên toán của trường, nên coi Y* phụ thuộc vào các biến X_1 và X_2. Tuy nhiên chúng ta không thể bỏ qua một yếu tố quan trọng trong bộ dữ liệu chéo gộp này tác động đến Y^* là sự thay đổi hình thức đánh giá điểm đầu vào môn Toán. Sự thay đổi này tạo nên hai giai đoạn: tự luận và trắc nghiệm, ảnh hưởng đến chất lượng tuyển sinh đại học và do đó ảnh hưởng đến khả năng học môn Toán cao cấp của sinh viên. Yếu tố về sự thay đổi giai đoạn này được đặc trưng bới một biến giả nhị phân δ, trong đó $\delta := 0$ đối với giai đoạn "tự luận" và $\delta := 1$ đối với giai đoạn "trắc nghiệm". Vì vậy để đưa yếu tố giai đoạn vào mô hình, ta cần tác động δ vào hệ số chặn và các hệ số hồi quy của các biến có liên quan trong mô hình Logistic sau:

$$\log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) = \alpha_0 + \alpha_1.\delta + (\beta_0 + \beta_1\delta).X_1 + (\gamma_0 + \gamma_1.\delta).X_2 \qquad (1)$$

Trong đó: $\pi = P(Y^* = 1|\delta, X_1, X_2)$ là xác suất để một sinh viên (trong điều kiện δ, X_1, X_2, thi đạt môn Toán cao cấp. Chạy hồi quy ước lượng cho mô hình logistic (1), nhận được mô hình ước lương:

$$\log\left(\frac{\hat{\pi}}{1-\hat{\pi}}\right) = -4,2142 - 2,5502.\delta + 0,5015.X_1 + 0,1623.\delta.X_1 + 0,1808, X_2 + 0,1118.\delta X_2$$

Tuy nhiên trong mô hình này, hệ số của $\delta.X_1$ có p-value $= 0,1993 > 0,05$, nên ta loại bớt biến tương tác $\delta.X_1$ và xét mô hình

$$\log\left(\frac{\pi}{1-\pi}\right) = a_0 + a_1.\delta + b.X_1 + (c_0 + c.\delta).X_2 \qquad (2)$$

Chạy hồi quy ước lượng cho mô hình logistic (2), nhận được mô hình ước lương:

$$\log\left(\frac{\hat{\pi}}{1-\hat{\pi}}\right) = -4,9876 - 1,4474.\delta + 0,6208.X_1 + 0,1781, X_2 + 0,1117.\delta X_2 \qquad (2a)$$

Như vậy việc chuyển từ hình thức thi tự luận sang hình thức thi trắc nghiệm môn Toán trong kỳ thi tốt nghiệp THPT đã làm giảm đi khả năng học môn Toán cao cấp ở bậc đại học (do hệ số của δ trong (2a) là -1,4474<0)

Chẳng hạn: Nếu một sinh viên có điểm đầu vào tự luận $X_1 = 8$, và điểm quá trình $X_2 = 8$ thì xác suất thi đạt yêu cầu môn Toán cao cấp ước tính là

$$\hat{\pi} = (1 + \exp(4,9876 - 0,6208.8 - 0,1781.8))^(-1) = 80,28\%$$

Nếu một sinh viên có điểm đầu vào trắc nghiệm $X_1 = 8$, và điểm quá trình $X_2 = 8$ thì xác suât thi đạt yêu cầu môn Toán cao cấp ước tính là

$$\hat{\pi} = (1 + \exp(4,9876 + 1,4474 - 0,6208.8 - 0,1781.8 - 0,1117.8))^(-1) = 70,05\%$$

6 Kết luận

Trong bài viết này, từ tập dữ liệu [11], chúng tôi đã xử lý thành tập dữ liệu tổng hợp [12]. Nhờ vào các phần mềm ứng dụng như : Exel, Eviews, chúng tôi đã tiến hành phân tích trên các mô hình toán học được thiết lập. Để kết luận, chúng tôi trình bày các kết quả chính của việc phân tích đó như sau:

1. Đối với các khóa thi tự luận (2015 – 2016):

   (a) Mặc dù các khóa này có điểm đầu vào đều không dưới 5 điểm, nhưng có đến 38% sinh viên có điểm đầu ra (điểm thi kết thúc học phần Toán cao cấp) không vượt quá 4 điểm. Hơn nữa trong số sinh viên có điểm đầu ra không vượt quá 4 điểm thì số sinh viên có điểm đầu vào không dưới 7 điểm (loại A và loại B) chiếm 32,19%, và số sinh viên có điểm quá trình không dưới 7 điểm chiếm 69,79%, thậm chí trong số đó có những sinh viên có có điểm đầu vào trên 9 điểm và có những sinh viên có điểm quá trình là 10 điểm. Ngược lại, có những sinh viên mà điểm đầu vào hoặc điểm quá trình chỉ từ 5 đến 6 điểm, nhưng lại có điểm đầu ra là 9 điểm, 10 điểm.

   (b) Các khóa 2015 – 2016 có điểm trung bình đầu vào khoảng 6,71 điểm, có điểm trung bình đầu ra là 5,09 điểm. Điểm trung bình đầu ra của các mức chất lượng đầu vào cũng chỉ dao động nhỏ xung quanh 5,09, thậm chí loại A cũng không có sự bứt phá đáng kể về điểm đầu ra.

2. Đối với các khóa thi trắc nghiệm (2017 – 2019):

   (a) Mặc dù các khóa này có điểm đầu vào đều không dưới 5 điểm, nhưng có đến 43,81% sinh viên có điểm đầu ra (điểm thi kết thúc học phần Toán cao cấp) không vượt quá 4 điểm. Hơn nữa trong số sinh viên có điểm đầu ra không vượt quá 4 điểm thì số sinh viên có điểm đầu vào không dưới 7 điểm (loại A và loại B) chiếm 51,95%, và số sinh viên có điểm quá trình không dưới 7 điểm chiếm 74,74%, thậm chí có những sinh viên có có điểm đầu vào trên 9 điểm và có những sinh viên có điểm quá trình là 10 điểm. Ngược lại, có những sinh viên mà điểm đầu vào hoặc điểm quá trình chỉ từ 5 đến 6 điểm, nhưng lại có điểm đầu ra là 8 điểm, 9 điểm.

(b) Các khóa 2017 – 2019 có điểm trung bình đầu vào khoảng 7,19 điểm, có điểm trung bình đầu ra là 4,95 điểm. Điểm trung bình đầu ra của các mức chất lượng đầu vào cũng chỉ dao động nhỏ xung quanh 4,95 điểm, thậm chí loại A cũng chỉ có điểm trung bình đầu ra là 5,78 điểm.

3. So sánh chất lượng các khóa giai đoạn 2015 – 2016 và các khóa giai đoạn 2017 – 2019:

   (a) Nếu xét hai khóa đại diện cho hai giai đoạn thi tốt nghiệp phổ thông trung học: khóa 2016 là khóa cuối cùng thi tự luận cho môn Toán, khóa 2017 là khóa đầu tiên thi trắc nghiệm cho môn Toán, ta thấy:

   - Điểm trung bình đầu vào của khóa 2017 (7,56 điểm) cao hơn 1,10 điểm so với điểm trung bình đầu vào của khóa 2016 (6,46 điểm). Tuy nhiên điểm trung bình đầu ra của khóa 2017 thấp hơn 0,48 điểm so với điểm trung bình đầu ra của khóa 2016

   - Điểm trung bình đầu ra ứng với cùng mức chất lượng đầu vào (loại A, loại B, loại C, loại D) của khóa 2017, đều thấp hơn 1,17 điểm so với khóa 2016.

   (b) Cả hai giai đoạn này đều có chung dấu hiệu bất thường như đã được chỉ ra, tuy nhiên dấu hiệu bất thường này ở giai đoạn thi trắc nghiệm nghiêm trọng hơn nhiều.

   (c) Tuy rằng điểm trung bình đầu vào của giai đoạn thi trắc nghiệm (7,19 điểm) cao hơn điểm trung bình đầu vào của giai đoạn thi tự luận (6,71 điểm), thậm chí tỷ lệ đầu vào loại A, loại B trong các nhóm học tập ở giai đoạn sau cao hơn nhiều so với giai đoạn trước, nhưng điểm trung bình đầu ra của giai đoạn thi trắc nghiệm (4,95 điểm) lại thấp hơn điểm trung bình đầu ra của giai đoạn thi tự luận (5,09 điểm).

4. Trong khoảng thời gian 2015-2019, đề thi tốt nghiệp phổ thông trung học môn toán chưa thực sự phân loại được chất lượng học sinh. Trong toàn bộ các khóa 2015 – 2019, số sinh viên có điểm thi kết thúc học phần Toán cao cấp dưới 4 điểm chiếm 41,46% . Trong số sinh viên đó có tới 45,11% số sinh viên có điểm toán đầu vào từ 7 điểm trở lên thậm chí có những học sinh có đầu vào 9 điểm hoặc trên 9 điểm. Mặt khác điểm quá trình, nhìn chung chưa đánh giá đúng thực chất của chất lượng đầu ra. Bằng chứng là trong số các sinh viên có điểm đầu ra không quá 4 điểm thì có tới 73,02% sinh viên có điểm quá trình không dưới 7, thậm chí trong số đó có sinh viên có điểm quá trình là 10 điểm.

5. Các thông tin nhận được ở trên, đặc biệt là các thông tin nhận được từ việc ước lượng các mô hình hồi quy dữ liệu chéo gộp 2016-2017 và dữ liệu chéo gộp cả hai giai đoạn 2016 – 2017 và 2015 – 2019 cho thấy một thực tế là việc thay đổi sang hình thức thi trắc nghiệm cho môn Toán ở kỳ thi tốt nghiệp trung học phổ thông đã làm hạn chế nghiêm trọng khả năng học tập môn Toán ở bậc đại học của các sinh viên. Việc thi trắc nghiệm môn Toán đã khiến cho giáo viên và học sinh ở bậc phổ thông dạy và học theo lối rèn luyện kỹ năng đoán đáp án, chọn "có hoặc không" trong chốc lát rất ngắn ngủi để đối phó với kỳ thi. Cách dạy và học như thế đã làm triệt tiêu khả năng diễn đạt và tư duy theo chiều sâu của người học. Hậu quả là người học không tự mình giải được một bài

toán, không biết cách trình bày lời giải của một bài toán hay diễn đạt một vấn đề sao cho chặt chẽ và mạch lạc.Trong khi đó, học toán nhằm bồi đắp một nền tảng về tư duy có chiều sâu và sự diễn đạt chặt chẽ. Do cách dạy và học ở các trường trung học phổ thông theo kiểu đối phó như vậy nên khi vào học ở các trường đại học, các bạn sinh viên đã thiếu đi cái nền tảng tư duy và diễn đạt nói trên. Điều này không chỉ gây tác hại không nhỏ cho việc học môn Toán nói riêng mà còn cho các môn học khác ở bậc đại học.

Tài liệu

[1] Jeffrey M. Wooldridge, Introductory Econometrics A Modern Approach, 2012, Fifth Edition, Michigan State University

[2] Jeffrey M. Wooldridge (2010). Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data, 2nd edition, The MIT Press. Cambridge Massachusetts London, England

[3] Robert M. Kunst. Econometric Methods for Panel Data, University of Vienna and Institute for Advanced Studies Vienna, 2010.

[4] Wooldridge, J. M. (2000), Instrumental Variables Estimation of the Average Treatment Eoect in the Correlated Random Coeffcient Model, mimeo, Michigan State University Department of Economics.

[5] Badi H. Baltagi. Econometric Analysis of Panel Data, Third Edition, Copyright 2005 John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex PO19 8SQ, England.

[6] Ziliak, J. P. (1997), "Efficient Estimation with Panel Data When Instruments Are Predetermined: An Empirical Comparison of Moment-Condition Estimators," Journal of Business and Economic Statistics 15, 419–431.

[7] Yin, Y. and S. Wu, 2000, Stationarity tests in heterogeneous panels, Advances in Econometrics 15, 275–296.

[8] Zhang, W. and L.F. Lee, 2004, Simulation estimation of dynamic discrete choice panel models with accelerated importance samplers, Econometrics Journal 7, 120–142.

[9] https://www.nhandan.com.vn, 24-9-2016, Le Ha, Hội Toán học Việt Nam chính thức đề nghị tiếp tục thi tự luận đối với môn Toán.

[10] http://m.netnews.vn/thi-thpt-quoc-gia-mon-toan-hoan-toan-bang-trac-nghiem-se-giet-chet-ca-mot-the-he-xa-hoi Math National High School Exam is completely by test: 'Will kill a whole generation'

[11] Data of courses 2015 - 2019 of the University of Finance - Marketing - The entry scores of some students for the 2015-2019 courses. - Advanced Maths course scores (process scores and final test scores) of some students for the 2015-2019 courses. Source: Training Management Department, Examined and Quality Control Department, UFM.

MỘT SỐ ÁP DỤNG CỦA BA ĐỊNH LÝ TRUNG BÌNH CỔ ĐIỂN

Nguyễn Trung Hiếu*
Võ Đức Thịnh†

Tóm tắt nội dung

Các định lý giá trị trung bình cổ điển, bao gồm Định lý Rolle, Định lý Lagrange và Định lý Cauchy đóng vai trò quan trọng trong Toán học và thường được xuất hiện trong các Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên. Mục tiêu đầu tiên của bài viết này là tổng hợp và đề xuất một số bài toán áp dụng của các định lý giá trị trung bình cổ điển này. Đây là những bài toán đã xuất hiện hoặc được giới thiệu trong các Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên toàn quốc trong những năm gần đây. Ngoài các áp dụng trong Toán học, các định lý giá trị trung bình còn có thể được sử dụng như một công cụ để giải thích và chứng minh cho các hiện tượng xuất hiện trong đời sống thực và trong một số lĩnh vực khoa học khác. Mục tiêu tiếp theo của bài viết này là giới thiệu một số ví dụ minh hoạ cho việc áp dụng của các định lý giá trị trung bình để giải thích và chứng minh một số kết quả trong vật lý và một số bài toán có yếu tố thực tế.

1 Ba định lý giá trị trung bình và một số hệ quả

Để xây dựng các định lý giá trị trung bình, ta cần bắt đầu từ một (hoặc một số) định lý trước đó. Cách tiếp cận thông thường là sử dụng Định lý Fermat về điều kiện cần cho cực trị của một hàm số khả vi làm tiền đề xây dựng các định lý giá trị trung bình. Vì vậy, trước tiên, chúng tôi sẽ trình bày các khái niệm về cực trị của hàm số.

Định nghĩa 1 (Cực trị của hàm số). Giả sử $S \subset \mathbb{R}$ và $f : S \to \mathbb{R}$. Khi đó,

(i) Hàm số f được gọi là đạt *cực đại* tại $c \in S$ nếu $\exists \delta > 0$ sao cho với mọi $x \in S$ thoả mãn $|x - c| < \delta$ ta có $f(x) \leq f(c)$.

(ii) Hàm số f được gọi là đạt *cực tiểu* tại $c \in S$ nếu $\exists \delta > 0$ sao cho với mọi $x \in S$ thoả mãn $|x - c| < \delta$ ta có $f(x) \geq f(c)$.

(iii) Cực đại và cực tiểu của hàm số f được gọi là *cực trị* của f.

Định lý 1 (Định lý Fermat). *Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ đạt cực trị tại $c \in (a, b)$ và f khả vi tại c thì*

$$f'(c) = 0.$$

*Trường Đại học Đồng Tháp
†Trường Đại học Đồng Tháp

Chứng minh. Nếu f đạt cực đại tại $c \in (a,b)$ thì $\exists \delta > 0$ sao cho $(c-\delta, c+\delta) \subset (a,b)$ và $\forall x \in (c-\delta, c+\delta)$, $f(x) \leq f(c)$. Giả sử

$$x_n = c - \frac{\delta}{2n} \in (c-\delta, c).$$

Khi đó $x_n \to c$ và vì vậy

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \geq 0.$$

Bây giờ, ta đặt

$$y_n = c + \frac{\delta}{2n} \in (c, c+\delta).$$

Khi đó ta có $y_n \to c$ suy ra

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(c)}{y_n - c} \leq 0.$$

Do đó $f'(c) = 0$.

Chứng minh cho trường hợp f đạt cực tiểu tại c được trình bày tương tự. □

Định lý 2 (Rolle). *Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm số liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b). Nếu $f(a) = f(b)$, thì $\exists c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Chứng minh. Đặt $K = f(a) = f(b)$. Vì f liên tục trên $[a,b]$ nên $\exists c_1, c_2 \in [a,b]$ sao cho f đạt giá trị lớn nhất tại c_1 và giá trị nhỏ nhất tại c_2. Nếu $f(c_1) > K$ thì $c_1 \in (a,b)$. Do đó $f'(c_1) = 0$ theo Định lý Fermat. Tương tự, nếu $f(c_2) < K$ thì $c_2 \in (a,b)$ và do đó $f'(c_2) = 0$. Nếu

$$f(c_1) \leq K \leq f(c_2) \implies f(x) = K \; \forall x \in [a,b] \implies f'(c) = 0 \text{ với mọi } c \in (a,b).$$

□

Định lý 3 (Định lý Lagrange). *Cho $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ là hàm liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b). Khi đó $\exists c \in (a,b)$ sao cho*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a).$$

Chú ý 1. *Định lý Lagrange còn được gọi là Định lý giá trị trung bình.*

Chứng minh. Định lý Lagrange được chứng minh từ việc áp dụng Định lý Rolle cho hàm số $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ xác định bởi

$$g(x) = f(x) - f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b-a}(b-x).$$

□

Các định lý dưới đây là một số hệ quả được suy ra từ Định lý Larange.

Hệ quả 1. *Nếu $f : I \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi trên khoảng $I \subset \mathbb{R}$ và $f'(x) = 0$ với mọi $x \in I$, thì f làm hàm hằng trên I.*

Chứng minh. Giả sử $a, b \in I$ với $a < b$. Khi đó f liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b). Do đó $\exists c \in (a,b)$ sao cho $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c) = 0$. Suy ra $f(b) = f(a)$ với mọi $a, b \in I$ thoả mãn $a < b$. Điều này có nghĩa là f là hàm hằng trên I. □

Hệ quả 2. *Cho $f : I \to \mathbb{R}$ làm một hàm khả vi với I là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Khi đó*

1. *f là đơn điệu tăng nếu và chỉ nếu $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$.*
2. *f là đơn điệu giảm nếu và chỉ nếu $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$.*

Chứng minh.

1. ($\Longleftarrow$) Giả sử $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$. Lấy $a, b \in I$ với $a < b$. Khi đó, từ Định lý Lagrange, $\exists c \in (a, b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c) \geq 0 \implies f(a) \leq f(b).$$

($\Longrightarrow$) Giả sử f là hàm tăng. Lấy $c \in I$ và $\{x_n\}$ là một dãy trong I sao cho $x_n \to c$ $\forall n$, $x_n < c$. Khi đó, với mọi n, ta có $f(x_n) - f(c) \leq 0 \implies \frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c} \geq 0$. Do đó

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \geq 0.$$

Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy thoả mãn I sao cho $x_n \to c$ $\forall n$, $x_n > c$. Khi đó với mọi n, $f(x_n) - f(c) \geq 0 \implies \frac{f(x_n)-f(c)}{x_n-c} \geq 0$. Do đó

$$f'(c) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(c)}{x_n - c} \geq 0.$$

Vì vậy trong cả hai trường hợp ta đều có $f'(c) \geq 0$.

2. Lưu ý rằng f là đơn điệu giảm nếu và chỉ nếu $-f$ là đơn điều tăng. Vì vậy sử dụng khẳng định 1. với $-f$ ta đạt được khẳng định 2.

□

Định lý 4 (Định lý Cauchy)**.** *Giả sử f và g là các hàm liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b). Khi đó, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho*

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

Chứng minh. Nếu $g(b) = g(a)$ thì bởi Định lý Rolle, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $g'(c) = 0$. Do đó ta có

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)) = 0.$$

Nếu $g(b) \neq g(a)$ thì áp dụng Định lý Rolle cho hàm số

$$h(x) := f(x) - f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(b)),\ \forall x \in [a, b],$$

ta tìm được $c \in (a, b)$ sao cho $h'(c) = 0$. Do đó

$$g'(c)(f(b) - f(a)) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

□

2 Một số áp dụng của ba định lý giá trị trung bình

2.1 Áp dụng của ba định lý giá trị trung bình trong việc giải một số bài toán Olimpic Toán sinh viên

Trước hết, chúng tôi tổng hợp một số bài toán có áp dụng các định lý giá trị trung bình cổ điển. Đây là những bài toán trong các đề thi hoặc được giới thiệu trong các Kỳ thi Olympic Toán học Sinh viên toàn quốc từ năm 2013 đến năm 2023.

Bài toán 1 (Đề thi Olympic toán sinh viên toàn quốc năm 2013, môn Giải tích)**.** *Cho hàm f liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$ và thỏa mãn $f(0)=0, f(1)=1$. Chứng minh rằng tồn tại các số phân biệt $x_1, x_2, \ldots, x_{2013}$ sao cho $\sum\limits_{k=1}^{2013} \dfrac{kx_k}{f'(x_k)} = \dfrac{2013 \times 1007}{2}$.*

Chứng minh. Đặt $T = 1+2+3+\cdots+2013 = \dfrac{2013 \times 2014}{2}; y_k = \dfrac{1}{T}\sum\limits_{i=1}^{k} i$. Rõ ràng với mọi $k = 1, 2, \ldots, 2012$ thì $y_k \in (0,1)$. Vì f liên tục trên $[0,1]$ nên tồn tại $\bar{x}_k$ để $f(\bar{x}_k) = y_k$. Ta chú ý rằng do $f(0) = 0$ và $f(1) = 1$ nên ta có thể chọn $\bar{x}_i \neq \bar{x}_{i+1}$ (thậm chí có thể chọn $\bar{x}_i$ tăng dần). Đặt $\bar{x}_0 = 0; \bar{x}_{2013} = 1$. áp dụng liên tiếp Định lý Cauchy cho 2013 đoạn $[0, \bar{x}_1], [\bar{x}_1, \bar{x}_2], \ldots, [\bar{x}_{2012}, 1]$ với các hàm f và $g(x) = x^2$ ta tìm được các điểm $x_1 \in (0, \bar{x}_1), x_2 \in (\bar{x}_1, \bar{x}_2), \ldots, x_{2013} \in (\bar{x}_{2012}, 1)$ thỏa mãn

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x_1)}{2x_1} &= \frac{f(\overline{x_1}) - f(0)}{\overline{x_1^2} - 0^2} \Rightarrow \bar{x}_1^2 - 0^2 = \frac{2}{T}\frac{1x_1}{f'(x_1)} \\
\frac{f'(x_2)}{2x_2} &= \frac{f(\bar{x}_2) - f(\bar{x}_1)}{\bar{x}_2^2 - \bar{x}_1^2} \Rightarrow \bar{x}_2^2 - \bar{x}_1^2 = \frac{2}{T}\frac{2x_2}{f'(x_2)} \\
\frac{f'(x_{2013})}{2x_{2013}} &= \frac{f(1) - f(\bar{x}_{2012})}{1 - \bar{x}_{2012}^2} \Rightarrow 1 - \bar{x}_{2012}^2 = \frac{2}{T}\frac{2013x_{2013}}{f'(x_{2013})}
\end{aligned}$$

Cộng lại ta được

$$1 = \frac{2}{T}\sum_{k=1}^{2013}\frac{kx_k}{f'(x_k)} \Rightarrow \frac{T}{2} = \sum_{k=1}^{2013}\frac{kx_k}{f'(x_k)}.$$

Do đó, $\dfrac{T}{2} = \sum\limits_{k=1}^{2013}\dfrac{kx_k}{f'(x_k)}$. □

Bài toán 2 (Đề thi Olympic toán sinh viên toàn quốc năm 2015, môn Giải tích bảng A)**.** *Cho f là một hàm nhận giá trị thực, xác định và liên tục trên $[0,1]$. Chứng minh rằng tồn tại các số $x_1, x_2, x_3 \in (0,1)$ sao cho*

$$\frac{f(x_1)}{4x_1} + \frac{f(x_2)}{6x_2^2} = f(x_3).$$

Chứng minh. Đặt $F(x) = \int_0^x f(y)dy$. Ta thấy $F(0) = 0$. Vì vậy, theo Định lý Lagrange, tồn tại $x_3 \in (0,1)$ để $F(1) = F(1) - F(0) = F'(x_3) = f(x_3)$. Mặt khác, áp dụng Định lý Cauchy cho hàm $F(x)$ lần lượt với các hàm $g(x) = x^2, g(x) = x^3$ ta suy ra sự tồn tại của $x_1, x_2 \in (0,1)$ để

$$F(1) = \frac{F(1) - F(0)}{1^2 - 0^2} = \frac{F'(x_1)}{2x_1} = \frac{f(x_1)}{2x_1}$$

$$F(1) = \frac{F(1) - F(0)}{1^3 - 0^3} = \frac{F'(x_2)}{3x_2^2} = \frac{f(x_2)}{3x_2^2}.$$

Kết hợp 3 đẳng thức trên, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 3 (Đề thi Olympic toán sinh viên toàn quốc năm 2015, môn Giải tích bảng B)**.** *Cho $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi liên tục. Chứng minh rằng tồn tại các số $x_1, x_2, x_3 \in (0,1)$ sao cho*

$$\frac{f'(x_1)}{4x_1} + \frac{f'(x_2)}{6x_2^2} = f'(x_3).$$

Chứng minh. Theo Định lý Lagrange, tồn tại $x_3 \in (0,1)$ để $f(1) - f(0) = f(x_3)$. Mặt khác, áp dụng Định lý Cauchy cho hàm $f(x)$ lần lượt với các hàm $g(x) = x^2, g(x) = x^3$ ta suy ra sự tồn tại của $x_1, x_2 \in (0,1)$ để

$$f(1) - f(0) = \frac{f(1) - f(0)}{1^2 - 0^2} = \frac{f'(x_1)}{2x_1}$$

$$f(1) - f(0) = \frac{f(1) - f(0)}{1^3 - 0^3} = \frac{f'(x_2)}{3x_2^2}$$

Kết hợp 3 đẳng thức trên, ta có điều phải chứng minh. □

Bài toán 4 (Đề giới thiệu của Trường ĐH Đồng Tháp năm 2015)**.** *Cho f là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ sao cho $f(1) = 0$. Chứng minh rằng phương trình $xf'(x) = (x - 2015)f(x)$ có nghiệm.*

Chứng minh. Xét hàm số $h(x) = x^{2015}e^{-x}f(x)$ với $x \in \mathbb{R}$. Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có

$$h'(x) = x^{2014}e^{-x}\left[2015f(x) - xf(x) + xf'(x)\right].$$

Ta lại có $h(0) = h(1) = 0, h$ là hàm số liên tục trên $[0,1]$ và khả vi trên $(0,1)$. Theo Định lý Rolle, tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $h'(c) = 0$. Điều này suy ra $xf'(x) = (x - 2015)f(x)$ có nghiệm trên $(0,1)$.

Bài toán 5 (Đề thi Olympic toán sinh viên toàn quốc năm 2018, môn Giải tích bảng A và B)**.** *Giả sử $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ là một hàm khả vi sao cho $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f(c) = 2018f'(c)\int_0^c f(x)dx$.* □

Chứng minh. Đặt $F(x) = x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt$. Ta có F là hàm khả vi trên $[0,1]$ và $F(0) = F(1) = 0$. Theo Định lí Rolle, tồn tại $x_0 \in (0,1)$ sao cho $F'(x_0) = 0$, tức là $\int_0^{x_0} f(t)dt = 0$.

Đặt $G(x) = e^{-2018f(x)}\int_0^x f(t)dt$. Ta có G là hàm khả vi trên $[0,1]$ và $G(0) = G(x_0) = 0$. Theo Định lý Rolle, tồn tại $c \in (0, x_0)$ sao cho $G'(c) = 0$. Từ đây, ta suy ra

$$f(c) = 2018f'(c)\int_0^c f(x)dx.$$

□

Bài toán 6 (Đề giới thiệu của Trường ĐH Đồng Tháp năm 2023)**.** *Cho f là hàm số có đạo hàm f' đồng biến trên $[0,2]$ và $f(0) = -1, f(2) = 1$. Chứng minh rằng tồn tại a, b, c phân biệt thuộc $[0,2]$ sao cho $f'(a)f'(b)f'(c) = 1$.*

Chứng minh.
Vì hàm số f có đạo hàm f' đồng biến trên $[0,2]$ nên f liên tục trên $[0,2]$. Áp dụng Định lí Lagrange, tồn tại $c \in (0,2)$ sao cho $f'(c) = \dfrac{f(2) - f(0)}{2-0} = 1$.

Xét hàm $g(x) = f(x) + x - 1$ với $x \in [0,2]$. Ta có g liên tục trên $[0,2]$ và

$$g(0)g(2) = -4 < 0.$$

Do đó, theo Định lí Rolle, tồn tại $x_0 \in (0,2)$ sao cho $g(x_0) = 0$ hay $f(x_0) = 1 - x_0$.

Áp dụng Định lí Lagrange, tồn tại $a \in (0, x_0)$ và $b \in (x_0, 2)$ sao cho

$$f'(a) = \frac{f(x_0) - f(0)}{x_0 - 0} = \frac{1 - x_0 + 1}{x_0} = \frac{2 - x_0}{x_0}$$

và

$$f'(b) = \frac{f(2) - f(x_0)}{2 - x_0} = \frac{1 - 1 + x_0}{2 - x_0} = \frac{x_0}{2 - x_0}.$$

Suy ra $f'(a)f'(b)f'(c) = 1.\dfrac{2-x_0}{x_0}\dfrac{x_0}{2-x_0} = 1.$ □

Tiếp theo, chúng tôi giới thiệu hai bài toán có áp dụng định lý giá trị trung bình. Hai bài toán này là tổng quát của nhiều bài toán đã có trong một số tài liệu tham khảo.

Bài toán 7. *Cho f là một hàm liên tục trên $[0,1]$ và khả vi trên $(0,1), f(1) = 0$ Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho*

$$\alpha f(c) + cf'(c) = 0.$$

Chứng minh. Xét hàm số

$$F(x) = x^{\alpha} f(x) \text{ với } x \in [0,1].$$

Ta có $F(x)$ liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$ và

$$F'(x) = \alpha x^{a-1} f(x) + x^{a} f'(x).$$

Mặt khác ta có $F(0) = F(1) = 0$. Theo Định lý Rolle, tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $F'(c) = 0$. Do đó

$$\alpha c^{\alpha-1} f(c) + c^{a} f'(c) = 0.$$

Do $c \neq 0$ nên ta có $\alpha f(c) + cf'(c) = 0$. □

Từ Bài toán 7, với những giá trị α cụ thể ta nhận được các dạng bài toán khác nhau. Chẳng hạn với $\alpha = 2023$ ta được Bài toán 8 sau:

Bài toán 8. *Cho f là một hàm liên tuc trên $[0,1]$ và khả vi trên $(0,1), f(1) = 0$ Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho*

$$f(c) + \frac{c}{2023} f'(c) = 0.$$

Bài toán 9. *Cho $u(x)$ và $v(x)$ là hai hàm số liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) sao cho $u(a) = v(b) = 0$. Chứng minh ràng tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $v'(c)u(c) + u'(c) = 0$.*

Chứng minh. Nhận thấy rằng nếu vào hai vế của đẳng thức cần chứng minh với $\epsilon^{i(s)}$ thì vế trái của đẳng thức cần chứng minh là đạo hàm của hàm số $F(x) = e^{t(x)}u(x)$.

Do đó, ta xét hàm số $F(x) = e^{x(x)}u(x)$ với $x \in [a,b]$. Ta có h là hàm số liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b) và $h(a) = h(b) = 0$. Theo Định lí Rolle, tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $F'(c) = 0$. Do đó

$$v'(c)c^{\theta(o)}u(c) + c^{\theta(c)}u'(c) = 0.$$

Suy ra $v'(c)u(c) + u'(c) = 0$. □

Từ Bài toán 9, cho $u(x)$ và $v(x)$ là các hàm cụ thể thì ta nhận được những dạng bài toán khác. Chẳng hạn như cho $u(x) = f(x), v(x) = \alpha \in \mathbb{R}$ ta được Bài toán 10 sau.

Bài toán 10 ([3], tr.45). *Cho f là hàm số liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b) sao cho*

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$, tồn tại $c \in (a,b)$ sac cho $\alpha f(c) + f'(c) = 0$.

Từ Bài toán 9, cho $u(x) = f(x), v(x) = -x$, ta được Bài toán 11 sau.

Bài toán 11 ([1], tr.48). *Cho $f(x)$ là hàm số liên tục trên $[0,1]$, khả vi trên $(0,1)$ vă*

$$f(0) = f(1) = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,1)$ sao cho $f'(c) = f(c)$.

Từ Bài toán 9, cho $u(x) = xf(x), v(x) = -x$ ta được Bài toán 2.35 sau.

Bài toán 12 (2, tr.199). *Cho $f(x)$ liên tục trên $[0,a]$, khả vi trên $(0,a)$ sao cho $f(a) = 0$. Chứng minh rằng tồn tại $c \in (0,a)$ để $f'(c) = f(c)\dfrac{c-1}{c}$.*

Từ Bài toán 9, cho $u(x) = f(x) + f'(x), v(x) = -x$ bổ sung một số điều kiện cần thiết để áp dụng được Định lý Rolle, ta nhận được Bài toán 13 sau.

Bài toán 13. *Cho $f(x)$ là hàm khả vi liên fục đền cấp hai trên $[a,b]$, sao cho*

$$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0.$$

Chứng minh rằng tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $f''(c) = f(c)$.

Từ Bài toán 9, cho $u(x) = \int_0^\infty f(t)dt$ và $v(x) = -x$ bổ sung một số điểu kiện cần thiết đê áp dụng được Định lí Rolle, ta nhận được Bài toán 14 sau.

Bài toán 14 ([4], tr.24). *Cho f liên tục trên $[a,b]$ và $\int_a^b f(x)dx = 0$. Chứng minh rằng, tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho $\int_a^c f(x)dx = f(c)$.*

Từ Bài toán 9, cho $u(x) = \int_a^x f(t)dt \int_c^b g(t)dt$ và $v(x) = -x$ bổ sung một số điều kiện cần thiết để áp dụng được Định lí Rolle, ta nhận được Bài toán 15 sau:

Bài toán 15 ([4], tr.25). *Giả sử f và g là các hàm liên tục vả không âm trên $[a,b]$. Chứng minh rằng, tồn tại $c \in (a,b)$ sao cho*

$$\frac{f(c)}{\int_a^c f(x)dx} + \frac{g(c)}{\int_c^b g(x)dx} = 1.$$

2.2 Áp dụng của ba định lý giá trị trung bình để giải thích và chứng minh một số hiện tượng và bài toán có yếu tố thực tế

Một số hiện tượng (bài toán) xuất hiện trong đời sống được hầu hết chúng ta thừa nhận nhưng không phải lúc nào chúng cũng được chứng minh một cách chặc chẽ. Trong phần này, chúng tôi sẽ sử dụng các định lý giá trị trung bình để giải thích hoặc tìm lời giải cho một số hiện tượng (bài toán) xuất hiện trong đời sống. Trước tiên, chúng tôi giới thiệu hai bài toán rất quen thuộc (trong vật lý) như sau.

Bài toán 16. *Trong chuyển động đều, tại mỗi thời điểm, vật sẽ chuyển động một quãng đường bằng nhau sau một khoảng thời gian như nhau.*

Chứng minh. Giả sử hàm chuyển động của vật theo thời gian là $f(t)$ với thời gian $t \in [0, T]$. Vì chuyển động đều nên hàm f liên tục trên $[0, T]$ và khả vi trên $(0, T)$. Hơn nữa hàm vận tốc của vật, $f'(t)$, là hàm hằng, nghĩa là $f'(t) = c$ với mọi $t \in [0, T]$. Giả sử t_1, t_2 là hai thời điểm bất kỳ. Giả sử t_0 là khoảng thời gian bất kỳ, ta sẽ chứng minh

$$f(t_1 + t_0) - f(t_1) = f(t_2 + t_0) - f(t_2).$$

Thật vậy, theo Định lý Lagrange, tồn tại $\bar{t}_1 \in (t_1, t_1 + t_0)$ và $\bar{t}_2 \in (t_2, t_2 + t_0)$ sao cho

$$f'(\bar{t}_1) = \frac{f(t_1 + t_0) - f(t_1)}{(t_1 + t_0) - t_1} = \frac{f(t_1 + t_0) - f(t_1)}{t_0}$$

và

$$f'(\bar{t}_2) = \frac{f(t_2 + t_0) - f(t_2)}{(t_2 + t_0) - t_2} = \frac{f(t_2 + t_0) - f(t_2)}{t_0}.$$

Vì $f'(\bar{t}_1) = f'(\bar{t}_2) = c$ nên

$$\frac{f(t_1 + t_0) - f(t_1)}{t_0} = \frac{f(t_2 + t_0) - f(t_2)}{t_0}.$$

Điều này suy ra rằng $f(t_1 + t_0) - f(t_1) = f(t_2 + t_0) - f(t_2)$. □

Bài toán 17. *Trong chuyển động đều, quãng đường đi được bằng vận tốc nhân với thời gian của chuyển động.*

Chứng minh. Giả sử hàm chuyển động của vật theo thời gian là $f(t)$ với thời gian $t \in [0, T]$. Vì vận tốc là không đổi trong toàn bộ thời gian chuyển động nên ta có thể giả sử hàm vận tốc là $f'(t) = v(t) = c$ với mọi $t \in [0, T]$. Định nghĩa hàm $g(t) := f(t) - ct$ với $t \in [0, T]$. Khi đó ta có $g'(t) = f'(t) - c = 0$ với mọi $t \in (0, T)$. Sử dụng Định lý 17, ta có $g(t)$ là hàm hằng nghĩa là $g(t) = m$ với $t \in (0, T)$. Vì chuyển động đều nên hàm f (và do đó g) là liên tục trên $[0, T]$. Điều này suy ra $g(0) = \lim_{t \to 0^+} g(t) = m$ và $g(T) = \lim_{t \to T^-} g(t) = m$.

Mặc khác, từ định của g ta có $g(0) = f(0) - c.0 = 0$. Suy ra $m = 0$. Vì vậy

$$f(t) - ct = g(t) = 0$$

với mọi $t \in [0, T]$ và do đó $f(t) = ct$ với mọi $t \in [0, T]$. □

Trong Vật lý, thông thường người ta sẽ sử dụng các phương pháp mô phỏng thực nghiệm kết hợp thống kê để khẳng định kết luận của các Bài toán 16 và 17. Ở đây, chúng tôi chứng minh chúng dưới góc nhìn của Toán học để cho thấy sự chặc chẽ và thuyết phục. Các bài toán sau đây cũng là các hiện tượng trong thực tế có thể được chứng minh bằng các định lý giá trị trung bình.

Bài toán 18. *Hai người cùng di chuyển từ thành phố A đến thành phố B theo hai con đường khác nhau nhưng có có độ dài bằng nhau. Họ xuất phát cùng lúc và cũng đến nơi cùng lúc. Chứng tỏ rằng, trong quá trình di chuyển, có ít nhất một thời điểm, cả hai người đi với cùng vận tốc nếu biết rằng phương trình chuyển động của hai người trên quãng đường từ A đến B là các hàm khả vi.*

Chứng minh. Giả sử f, g là các hàm quãng đường đi được theo thời gian của hai người và $[0, T]$ là khoảng thời gian hai người di chuyển từ A đến B. Áp dụng Định lý Cauchy cho hai hàm số f và g, ta khẳng định có $t_0 \in (0, T)$ sao cho

$$g'(t_0)(f(T) - f(0)) = f'(t_0)((g(T) - g(0)).$$

Vì $f(T) = g(T)$ và $f(0) = g(0)$ nên ta có $g'(t_0) = f'(t_0)$. Vậy tại thời điểm t_0 cả hai người có cùng vân tốc. □

Bài toán 19. *Có hai ôtô xuất phát cùng một lúc, chạy ngược chiều nhau trên đoạn đường AB. Biết rằng cả hai ôtô đến đích cùng thời điểm. Chứng minh rằng trong quá trình chạy, có thời điểm hai ôtô có cùng vận tốc nhưng ngược chiều nhau.*

Chứng minh. Giả sử ôtô 1 là ôtô xuất phát từ A và ôtô 2 là ôtô xuất phát từ B. Gọi $f(t), g(t)$ lần lượt là hàm khoảng cách từ A đến hai ôtô theo thời gian t. Khi đó hàm số quãng đường đi được theo thời gian của hai là $f(t)$ và $s - g(t)$, trong đó s là độ dài quãng đường AB. Giả sử T là thời gian hai ôtô đi hết quãng đường. Đặt $h(t) := f(t) - g(t) + s$. Khi đó ta có $h(0) = s, h(T) = s$. Áp dụng Định lý Rolle ta có sự tồn tại của một điểm $c \in (0, T)$ sao cho $h'(c) = 0$, nghĩa là $f'(c) = g'(c)$. Chú ý rằng hàm số vận tốc của ôtô 1 và ôtô 2 lần lượt là $v_1(t) = f'(t)$ và $v_2(t) = -g'(t)$. Do đó tại thời điểm c hai ôtô có cùng độ lớn về vận tốc nhưng ngược chiều nhau. □

Tài liệu

[1] Trần Lưu Cường. *Toán Olympic cho sinh viên tập 1*. Nhà xuất bản Giáo dục, 1998.

[2] Hội Toán học Việt Nam. *Kỷ yếu Kì thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc từ năm 1993 đến năm 2022.*

[3] W. J. Kaczor, M. T. Nowak. *Problems in Mathematical Analysis II, American Mathematical Society*, 2000.

[4] W. J. Kaczor, M. T. Nowak. *Problems in Mathematical Analysis III, American Mathematical Society*, 2000.

SOME PROBLEMS INDUCED BY CAUCHY FUNCTIONAL EQUATIONS

Nguyen Thuy Trang
Nguyen Quang Dieu high school for the gifted, Dong Thap province

Tóm tắt nội dung

In this paper, we propose three ways to exploit the original problem: exploiting the assumptions of the problem, exploiting Cauchy's functional equation in the extended direction, and exploiting a class of problems derived from Cauchy's functional equations. These exploitative directions are presented in 15 problems related to Cauchy's functional equations, and we have arranged them in order of inheritance and development of each other.

1 PRELIMINARY

Functional equations are one of the most interesting and difficult topics in elementary math. In the Mathematical Olympiad competitions at regional, national, and international levels, problems about functional equations are usually presented. These problems are often difficult or even very difficult. Therefore, the organization of teaching for this content should also be considered and researched. How can we take advantage of the available time to teach functional equation topics effectively? That has always been a question that we, the companions of the math team at Nguyen Quang Dieu High School in the past few years, have always wondered about.

During the teaching process, we realized that the "original problem" model is really the key to solving these difficulties. Through this, the teacher will cleverly organize a lesson in which the students are very excited to find out for themselves the beautiful results of a certain starting problem. Cauchy's functional equations play an important role in functional equations, and this is an interesting result that can be taught with this model. Many functional equations can be solved neatly by converting them to Cauchy's functional equations.

To help students learn the topic of functional equations well by knowing how to exploit the original problem to solve related problems and at the same time form positive, proactive, and creative thinking in them, we boldly chose to research the topic.

2 Main results

First, we would like to present some specific teaching activities to help students discover new problems from the original problem "Cauchy's functional equation".

2.1 Introduction to the original problem

Problem 1. The original problem (Cauchy's functional equation).

Find all functions f such that they continue on $\mathbb{R}$ and satisfy

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R} \tag{*}$$

Solution. Assume that f is a solution of the problem. Since the assumption f is additive and by induction, we have $f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Since (*), replace $x = y = 0$, we get $2f(0) = f(0)$, lead to $f(0) = 0$. Continue to replace $y = -x$, we have $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$ therefore $f(-x) = -f(x)$ and $f(x)$ is odd function. Which implies that $n \in \mathbb{N}^*, f(-nx) = -f(nx) = -nf(x)$. Hence $f(nx) = nf(x), \forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}$.
Here, we replace $x = \dfrac{1}{n}$, we have $f(1) = nf\left(\dfrac{1}{n}\right)$ or $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}f(1), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Therefore, $\forall m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$, we obtain $f\left(\dfrac{m}{n}\right) = mf\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{m}{n}f(1)$. This shows $f(x) = x.f(1), \forall x \in \mathbb{Q}$.

On the other hand, for all $x_0 \in \mathbb{R}$, since $\mathbb{Q}$ is dense on $\mathbb{R}$ so there exits (x_n) for $x_n \in \mathbb{Q}$ such that $\lim x_n = x_0$. Since f continue on $\mathbb{R}$ lead to $\lim f(x_n) = f(x_0)$, and $\lim [f(1).x_n] = f(x_0)$, that is $f(x_0) = ax_0, \forall x_0 \in \mathbb{R}$ $(a = f(1))$. Hence $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$.

After students understand and master the content as well as how to prove the problem, teachers guide them to explore some of the following problems.

2.2 Directions to exploit the original problem

2.2.1 The first direction: Exploiting the hypothesis of problem

Method 1. Still retain the properties of the additive function but replace the above continuity assumption with one of the following assumptions

1. $f(x)$ continue at $x_0 \in \mathbb{R}$ (Problem 1.1)
2. $f(x)$ monotone on $\mathbb{R}$ (Problem 1.2)
3. $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Problem 1.3)
4. $f(x)$ monotone on $[a; b] \subset \mathbb{R}$ (Problem 1.4)

In the following, we would like to provide specific solutions for each problem.

Problem 1.1. Find all functions f such that they continue on $\mathbb{R}$ and satisfy

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Solution. Indeed, for each $x_1 \in \mathbb{R}$, by f is additive, we have

$$f(x) = f(x - x_1 + x_0) + f(x_1) - f(x_0), \forall x \in \mathbb{R}.$$

This and f is continuous at $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = \lim\left[f(x - x_1 + x_0) + f(x_1) - f(x_0)\right] = f(x_0) + f(x_1) - f(x_0) = f(x_1).$$

So f is continuous at x_1 and since x_1 is arbitrary, therefore f is continuous on $\mathbb{R}$.

Problem 1.2. Find all functions f such that they monotone on $\mathbb{R}$ and satisfy

$$f(x+y) = f(x) + f(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Solution. Since f is additive function on $\mathbb{R}$ by the above proof, $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{Q}$. For each $x_0 \in \mathbb{R}$ there exits two sequences (x_n) , (y_n) satisfy

1. $x_n \in \mathbb{Q}, y_n \in \mathbb{Q}, \forall n \in \mathbb{N}^*$
2. $x_n < x_0 < y_n$
3. $\lim x_n = x_0$ and $\lim y_n = x_0$

Suppose that f monotones on $\mathbb{R}$. Then $f(x_n) < f(x_0) < f(y_n)$. Thereby implying that $ax_n < f(x_0) < ay_n$, lead to $\lim ax_n \leq \lim f(x_0) \leq \lim ay_n$, that is $ax_0 \leq f(x_0) \leq ay_0$. Therefore $f(x_0) = ax_0$, $\forall x_0 \in \mathbb{R}$. Hence $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$.

Problem 1.3. Find all functions satisfying $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ and

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Solution. For all arbitrary x, y belong to $\mathbb{R}$, and assume that $x \geq y$, then $x - y \geq 0$. Which implies $f(x-y) \geq 0$. We have $f(x) = f(x-y) + f(y) \geq f(y)$ that is f is monotone increasing function on $\mathbb{R}$. By Problem 1.1, we have $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$.

Problem 1.4. Find all functions f such that they monotone on $[a, b]$ and

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Solution. This expands on Problem 1.2. Since f is monotone on $[a; b]$, we will prove that f is monotone on $\mathbb{R}$. Suppose that f monotone increasing on $[a; b]$. Putting $\alpha = \dfrac{b-a}{2} > 0$.

Assume $x \geq y$ is arbitrary on $[a;b]$. As f increase on $[a;b]$ lead to $f\left(x-\dfrac{a+b}{2}\right) \geq f\left(y-\dfrac{a+b}{2}\right)$. Thereby implying $f(x) \geq f(y), \forall x,y \in [-\alpha;\alpha]$. As $f(0)=0$, thereby yielding $f(x) \geq 0, \forall x \in [0;\alpha]$. For $x \geq y$, putting $k = \left[\dfrac{x-y}{\alpha}\right]$. Which implies that $k \in \mathbb{N}$, for all x,y are arbitrary on $\mathbb{R}$, we have $x-y = k\alpha + t$, $t \in [0;\alpha]$. As f is an additive function, so

$$f(x) - f(y) = f(x-y) = f(k\alpha) + f(t) = kf(\alpha) + f(t) \geq 0.$$

Therefore f incresing monotone on $\mathbb{R}$.

Problem 1.5. Find all functions f such that they are bouned on $[c;d]$ and satisfy

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x,y \in \mathbb{R}$$

Solution. Let $x \in \mathbb{R}$ be arbitrary. Then for each $n \in \mathbb{N}$, there exits $r_n \in \mathbb{Q}$ depends on n and x, such that $nx - d \leq r_n \leq nx - c$, implies to $f(nx - r_n)$ is bouned by $c \leq nx - r_n \leq d$. We have

$$|f(nx - r_n)| = |f(nx) + f(-r_n)| = |nf(x) - ar_n| = |n(f(x) - ax) + a(nx - r_n)|$$

c $\geq n\,|f(x) - ax| - |a(nx - r_n)|$. Thereby yielding $|f(nx - r_n)| + |a(nx - rn)| \geq n\,|f(x) - ax|$. But $|a(nx - r_n)| \leq \max\{|ac|, |ad|\}$ and $f(nx - r_n)$ is bouned for all $n \in \mathbb{N}$ lead to $n\,|f(x) - ax|$ also is bouned for all $n \in \mathbb{N}$. This occurs if $f(x) - ax = 0$. Hence $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$.

Method 2. Replace $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ by $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, we could remove the continuous hypothesis of f.

This activity aims to train students' logical thinking from the point of view that moves from considering discrete to continuous functions.

Remark. According to the properties of the additive function, all of the above problems lead to the same result: $f(x) = x.f(1), \forall x \in \mathbb{Q}$, this that $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{Q}$. To lead to the final solution $f(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$ in each problem, we will pay attention as follows

1. Using the properties of additive functions, we can reduce problem 1.1 to the original problem, that is, we can prove that when $f(x)$ is continuous at $x_0 \in \mathbb{R}$ then f is continuous on $\mathbb{R}$.

2. On the other hand, in problem 1.2, by the monotone increasing assumption on $\mathbb{R}$ and using the properties of sequence, we can obtain the solution.

3. Problem 1.3 can be converted to problem 1.2 thanks to the assumptions and properties of the additive function.

4. Problem 1.4 is the inheritance of the results of problem 1.3, which leads to problem 1.2.

5. In problem 1.5, it is necessary to apply the boundedness of the function on an interval to find the solution.

2.2.2 The second direction: Exploiting Cauchy's functional equation by extension

Method 1. Putting the relation of the above function through logarithmic calculation. That is, replacing $f(x)$ by $\ln(f(x))$, we have

$$\ln f(x+y) = \ln f(x) + \ln f(y) = \ln(f(x).f(y)),$$

That is $f(x+y) = f(x).f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Then teachers can propose the following problem to students.

Problem 2. Find all functions f such as they are continuous on $\mathbb{R}$ and satisfy

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Solution. It is clear that $f(x) \equiv 0$ is a solution of Problem 2. Considering case $f(x) \neq 0$. Then, there exits $x_0 \in \mathbb{R}$ such that $f(x_0) \neq 0$. By the additive function,

$$f(x_0) = f(x + (x_0 - x)) = f(x).f(x_0 - x), \neq 0, \forall x_0 \in \mathbb{R}.$$

Thereby fielding $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ and $f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right)\right]^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Letting $\ln f(x) = g(x)$. Then, $f(x)$ is continuous on $\mathbb{R}$ and

$$g(x+y) = \ln f(x+y) = \ln[f(x)f(y)] = \ln f(x) + \ln f(y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

By Problem 1 (Cauchy's functional equation) then $g(x) = bx$ $a \in \mathbb{R}$ that is $f(x) = e^{bx} = a^x$ với $a = e^b$, any arbitrary $a > 0$. Checking again, this function satisfies the above problem.

Method 2. Replace x by e^x, we get $f(e^{x+y}) = f(e^x) + f(e^y)$ that is $g(x+y) = g(x).g(y)$, where $g(x) = f(e^x)$ and $g(x)$ are Cauchy's functional equation. On the other hand, as $f(e^{x+y}) = f(e^x) + f(e^y)$ leads to $f(e^x.e^y) = f(e^x) + f(e^y)$. Replace e^x by x, we gain $f(xy) = f(x) + f(y)$. This relationship with Cauchy's relation interacts by raising the power of the variable. However, raising the power of a variable has the condition that the value of the variable must be positive. If one variable is zero, then the problem becomes easy with the result being $f(x) \equiv 0$. If both variables are positive, the problem is converted to Cauchy's functional equation by raising the variable to a power. If both variables are negative, the product xy is positive, so it is reduced to the case that both variables are positive. From there, we have the following problem.

Problem 3. Find all functions f such as they are continuous on $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ and satisfy

$$f(xy) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}.$$

Solution. Suppose $x = y = 1$. Since the assumption lead to $f(1.1) = f(1) + f(1)$, equivalent $f(1) = 2f(1)$ that is $f(1) = 0$. We have again, for $x = y = -1$ then $f(-1) = 0$. On the other hand, let $y = -1$, we get $f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Therefore f is an odd function.

1. Suppose $x, y \in \mathbb{R}^+$, putting $x = e^u$, $y = e^v$, $f(e^t) = g(t)$. Then $g(u+v) = f(e^{u+v}) = f(e^u.e^v) = f(e^u) + f(e^v) = g(u) + g(v), \forall u, v \in \mathbb{R}$. By the result of Cauchy's functional equation, we get $g(t) = at$, implying to

$$f(x) = a \ln x, \forall x \in \mathbb{R}^+, a \in \mathbb{R}.$$

2. Suppose $x, y \in \mathbb{R}^-$ then $xy \in \mathbb{R}^+$. Let $y = x$, by result of the above part, we have $f(x) = \frac{1}{2} f(x^2) = \frac{1}{2} a \ln x^2 = a \ln |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}^-, a \in \mathbb{R}$ is defined in the above. Hence for all $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ then $f(x) = a \ln |x|$ with arbitrary $a \in \mathbb{R}$.

Checking again, this function satisfies the above problem. So, solution of problem 3 is $f(x) = a \ln |x|, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, with arbitrary $a \in \mathbb{R}$.

Method 3. Since $f(x+y) = f(x) + f(y)$ raising the variable to power of e we have $f(e^{x+y}) = f(e^x).f(e^y)$ that is $f(e^x.e^y) = f(e^x).f(e^y)$ and $g(xy) = g(x)g(y)$. Obviously, the problem has an immediate solution if the domain does not contain zero. Next, we have the following problem.

Problem 4. Find all functions f such as they are continuous on $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ and satisfy

$$f(xy) = f(x) \cdot f(y), \forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Solution. Replace y in the assumption by 1, we have $f(x)(1 - f(1)) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
Case 1. $f(1) \neq 1$ then $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R}$. This solution satisfies the problem.
Case 2. $f(1) = 1$. Then

$$f(1) = f\left(x \frac{1}{x}\right) = f(x) f\left(\frac{1}{x}\right), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Which implies that $f(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Therefore

$$f(x^2) = f(x) f(x) = [f(x)]^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1. Considering for all $x, y \in \mathbb{R}^+$, putting $x = e^u$, $y = e^v$ and $g(t) = f(e^t)$. Then, $g(t)$ is continuous on $\mathbb{R}$ and $g(u+v) = g(u) g(v), \forall u, v \in \mathbb{R}$. By Problem 2, $g(t) = a^t, \forall t \in \mathbb{R}$, arbitrary $a > 0$ and this leads to $f(x) = f(e^u) = g(u) = a^u = a^{\ln x} = x^{\ln a} = x^\alpha, \forall x \in \mathbb{R}^+$, where $\alpha = \ln a$.

2. Considering for all $x, y \in \mathbb{R}^-$ then $xy \in \mathbb{R}^+$.

   Suppose $y = x$ then since the assumption and the above result, we get $[f(x)]^2 = f(x^2) = (x^2)^\alpha, \forall x \in \mathbb{R}^-, \alpha \in \mathbb{R}$ was defined the above part.

   As $f(x) \neq 0$, $\forall x \neq 0$ and $f(x)$ are continous on $\mathbb{R}^-$ so $f(x) = |x|^\alpha$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ or $f(x) = -|x|^\alpha, \forall x \in \mathbb{R}^-$.

Checking again, we have the conclusion

1. $f(x) \equiv 0, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
2. $f(x) = |x|^{\alpha}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, arbitrary $\alpha \in \mathbb{R}$
3. $f(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha}, \forall x \in \mathbb{R}^{+} \\ -|x|^{\alpha}, \forall x \in \mathbb{R}^{-} \end{cases}$, arbitrary $\alpha \in \mathbb{R}$

Problem 5 (Jensen's functional equation). Find all functions f such as they are continuous on $\mathbb{R}$ and satisfy

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Solution. Putting $g(x) = f(x) - f(0)$. We have $g(x)$ is continuous on $\mathbb{R}$ where $g(0) = 0$ and

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{g(x)+g(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Taking $y = 0$ và $x = 0$ respectively. Thereby leading to

$$g\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{g(x)}{2}, g\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{g(y)}{2}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

$g\left(\dfrac{x+y}{2}\right) = \dfrac{g(x)}{2} + \dfrac{g(y)}{2}$, equivalent $g\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) = g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{y}{2}\right), \forall x, y \in \mathbb{R}$. Thereby yielding

$$g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Since $g(x)$ is continuous by Problem 1 (Cauchy's functional equation), we have

$$g(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}.$$

Which implies that $f(x) = ax + f(0) = ax + b$, với $b = f(0)$.
Checking again leads to the solution of Jensen's functional equation $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$, arbitrary $ab \in \mathbb{R}$.

2.2.3 The third direction: Exploiting a class of problems derived from Cauchy's functional equation

Problem 6. Find all functions f such as they are continuous on $\mathbb{R}$ and satisfy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Solution. We have $f(x+y) + 1 = (f(x)+1)(f(y)+1)$. Letting $g(x) = f(x) + 1$, implies that $g(x+y) = g(x)g(y)$. By the result of Problem 2, we have $g(x) = a^{x}$. Therefore, $f(x) = a^{x} - 1$, arbitrary $\forall x \in \mathbb{R}$.

Problem 7. Find all functions f such as they are continuous on $\mathbb{R}$ and satisfy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + f(x)f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Solution. We rewrite the given functional equation

$$f(x)+f(y)-f\left(x+y\right)=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-(x^2+y^2)\right]$$

This is equivalent

$$f(x)+\frac{1}{2}x^2+f(y)+\frac{1}{2}y^2=f\left(x+y\right)+\frac{1}{2}(x+y)^2$$

Putting $g(x)=f(x)+\frac{1}{2}x^2$, we get $g(x)$ that is continuous on $\mathbb{R}$ satisfy

$$g(x)+g(y)=g(x+y),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

So, by Problem 1, we have $g(x)=ax$. Thereby leading $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+ax$, arbitrary $\forall x\in\mathbb{R},a\in\mathbb{R}$.

Checking again, we obtain that $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+ax$ satisfy problem.

Problem 8

Suppose $a\in\mathbb{R}$, find all functions f such as they are continuous on $\mathbb{R}$ and satisfy

$$f(x-y)=f(x)-f(y)+axy,\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Solution. As $f(1)=f(1-0)=f(1)-f(0)+0=f(1)-f(0)$ implies that $f(0)=0$. Therefore

$$f(0)=f(1-1)=f(1)-f(1)+a=a=0.$$

We rewrite

$$f\left(x-y\right)=f(x)-f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

This implies that

$$f(x)=f\left(x+y-y\right)=f(x+y)-f(y)$$

Lead to $f(x+y)=f(x)+f(y)$. Hence $f(x)=ax,\forall x\in\mathbb{R}$.

Problem 9. Find all functions f such as they are continuous on $\mathbb{R}$ and satisfy

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y),\forall x,y\in\mathbb{R}$$

Solution. Putting $\frac{x}{y}=t$, that is $x=yt$, replace x in assumption by yt we have $f(t)=f(ty)-f(y)$ that is $f(ty)=f(t)+f(y)$. By the result of Problem 3, we obtain $f(x)=a\ln x,\forall x\in\mathbb{R}^+,a\in\mathbb{R}$.

Problem 10. Find all functions f such as they are continuous on $\mathbb{R}$ and satisfy

$$f(x+f(y))=2y+f(x),\forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Solution. Let $x = 0$, we have $f(f(y)) = 2y + f(0)$. It is clear that f is one to one on $\mathbb{R}$. Then, taking $x = y = 0$, we have $f(f(0)) = f(0)$ so $f(0) = 0$. Therefore $f(f(y)) = 2y$, $\forall y \in \mathbb{R}$ and $2f(y) = f(f(f(y))) = 2f(y) + f(x) = f(2y) + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$ that is $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

I have again, f is continuous on $\mathbb{R}$ so $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$. By combining this with $f(f(y)) = 2y$, we obtain $a = \pm\sqrt{2}$. Checking again, we conclude $f(x) = \sqrt{2}x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ or $f(x) = -\sqrt{2}x, \forall x \in \mathbb{R}$. Note: in Problem 10, we can replace 2 by arbitrary $k^2 \in \mathbb{R}$. The general method to solve the above problems is to solve the functional equations on the sets of numbers $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ step to step, then use the continuity of the function to convert the limit calculation and solve the functional equation on $\mathbb{R}$. The transformation of proofs in problems on the sequence of sets of numbers $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ is made possible through some results of the following number theory:

1. Every rational number can be uniquely represented as a simplified fraction.
2. Every real number is the limit of a fundamental sequence of rational numbers.

3 Some application exercises

Exercise 1. Find $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ such as it is continuous and satisfy

$$f(x+y) = f(x) + f(y) + xy(x+y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hint. Putting $f(x) - \dfrac{x^3}{3} = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercise 2. (Balkan 2000) Find $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$f(xf(x) + f(y)) = y + [f(x)]^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hint. Show $f(0) = 0, f(f(y)) = y$. Then prove f is additive and $[f(x)]^2 = x^2$. Then, considering cases $f(1) = 1$ or $f(1) = -1$. Corresponding to these cases are the solutions $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ and $f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercise 3. Find $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$g(x+y) + g(x)g(y) = g(xy) + g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hint. Find f different from two trivial solutions $f(x) = 0$ and $f(x) = 2$. Show $g(x+y) = g(x) + g(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}$ and $f(x)$ is odd function. Then prove $g\left(x^2\right) = [g(x)]^2$. Here, it is clear, and the solution is $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercise 4. (Viet Nam 1999) Suppose $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ is continuous and satisfy

(i). $f(0) = f(1) = 0$,

(ii). For all $x, y \in [0,1]$ we have $2f(x) + f(y) = 3f\left(\dfrac{2x+y}{3}\right)$. Prove $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$.

Hint. Replace $(x,y) = (0,1)$ implies $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$.

Replace $(x,y) = (1,0)$ implies $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$.

Replace $(x,y) = \left(0, \dfrac{1}{3}\right)$ implies $f\left(\dfrac{1}{9}\right) = 0$.

Replace $(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, 0\right)$ implies $f\left(\dfrac{2}{9}\right) = 0$.

Replace $(x,y) = \left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$ implies $f\left(\dfrac{4}{9}\right) = 0$.

Replace $(x,y) = \left(\dfrac{1}{3}, 1\right)$ implies $f\left(\dfrac{5}{9}\right) = 0$.

Replace $(x,y) = \left(1, \dfrac{1}{3}\right)$ implies $f\left(\dfrac{7}{9}\right) = 0$.

Similar to above, using (ii), we can show by induction $f\left(\dfrac{a}{3^n}\right) = 0, a, n \in \mathbb{N}$. Since the set of all rational numbers has the form $\dfrac{a}{3^n}, a, n \in \mathbb{N}$ it is dense in the interval [0,1]. Hence $f(x) = 0, \forall x \in [0,1]$.

Exercise 5. Find all $f(x)$ such that they is defined on $\mathbb{R}$ and satisfy

$$f[(x+1)f(y)] = y[f(x)+1], \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hint. Show $f(0) = 0, f(-1) = -1, f(1) = 1$. Then show f is multiplicative and f is additive.

Exercise 6 (THTT). Find $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ such that they is differentiable at $x = 1$ and

$$f(xy) = \sqrt{x}f(y) + \sqrt{y}f(x), \forall x, y > 0.$$

Hint. Putting $g(x) = \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}, \forall x > 0$.

Exercise 7 (IMO 1989, Shortlist). Find all numbers a such that exist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ is continuous and satisfy $f(0) = 0, f(1) = 1$ and

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = (1-a)f(x) + af(y), \forall 0 \le x \le y \le 1.$$

Hint. Show $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = a, f\left(\dfrac{1}{4}\right) = a^2, f\left(\dfrac{3}{4}\right) = 2a - a^2, f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 3a^2 - 2a^3$. Therefore, we have $3a^2 - 2a^3 = a$ suy ra $a \in \left\{0, \dfrac{1}{2}, 1\right\}$. Next, we consider each case. This leads to $a = \dfrac{1}{2}$.

Exercise 8. (IMO 2002) Find all $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz), \forall x, y, z, t \in \mathbb{R}.$$

Exercise 9. (IMO 2004, Shortlist) Find all $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$f\left(x^2 + y^2 + 2f(xy)\right) = [f(x+y)]^2, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Exercise 10. (IMO 2005, Shortlist) Find $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfying

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Hint. The solution is $f(x) = 2x - 1, f(x) = -x - 1$ $f(x) = x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$ or $f(x) = x^2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

4 Conclusion

We apply the original problem model throughout the process of training a team of excellent students in the courses at Nguyen Quang Dieu High School for the gifted. Indeed, with this teaching method, lessons are always full of excitement. Students gradually gain knowledge about functional equations confidently and creatively.

Due to time reasons, we can only present some problems that begin with the original problem, which is Cauchy's functional equation. We believe that you will find other new applications of this equation.

Tài liệu

[1] Nguyễn Văn Mậu (2011), *Phương trình hàm*, Nhà xuất bản Giáo dục.

[2] Nguyễn Ngọc Diệp (2014), *Một số phương pháp giải phương trình hàm*, Luận văn thạc sĩ Toán học.

[3] Đào Thị Lê Dung, *Một số vấn đề về phương trình Cauchy*, Hội thảo các trường THPT chuyên khu vực duyên hải và đồng bằng Bắc Bộ lần thứ IV.

[4] Dusan Djukic, Vladimir Jankovic, Ivan Matic (2004), *A collection of Problems Suggested for The IMO 1959–2004*, Springer.

PHÉP ĐẾM CƠ BẢN

Nguyễn Xuân Thu
THPT Chuyên Nguyễn Đình Chiểu, Đồng Tháp

Tóm tắt nội dung

Phép đếm là một khái niệm rất sơ khai và cơ bản của tổ hợp, là nền tảng để hình thành các kỹ thuật đếm nâng cao. Vì thế việc giảng dạy phép đếm cơ bản đóng vai trò tiền đề và quan trọng đối với học sinh. Phép đếm thường được giảng dạy sau khi dạy về các nguyên lí cơ bản trong tổ hợp.

Các phương pháp đếm, số phần tử của một tập hợp

PP1. Dựa vào các tính chất của phần tử trong tập hợp. (dùng hai quy tắc đếm, các cấu hình cơ bản hoán vị, chỉnh hợp, tổ hợp hoặc kết hợp các đối tượng này lại với nhau).

PP2. Sử dụng song ánh.

PP3. Qui nạp (truy hồi, chỉ sử dụng được khi số phần tử cần đếm phụ thuộc 1 hoặc nhiều biến nguyên dương $|X| = S(n), S(m, n), \ldots$).

Thông thường ta thử tìm ra một số đối tượng thỏa mãn hoặc giải bài toán với các trường hợp nhỏ, quan sát phát hiện các đặc điểm, tính chất, cấu hình quen thuộc từ đó chọn chiến lược giải phù hợp.

1 Hai quy tắc đếm

Quy tắc cộng Công việc A có thể tiến hành theo 1 trong k phương án $A \ldots 1, A \ldots 2, \ldots, A \ldots k$.

$A \ldots 1$ có thể thực hiện theo $n \ldots 1$cách.

$A \ldots 2$ có thể thực hiện theo $n \ldots 2$cách.

......

$A \ldots k$ có thể thực hiện theo $n \ldots k$ cách.

Khi đó tổng số cách để thực hiện được công việc là $n \ldots 1 + n \ldots 2 + \cdots + n \ldots k = \sum \ldots i = 1^k n \ldots i$ cách.

Cách phát biểu 2 Cho k tập hợp khác rỗng đôi một không giao nhau $A \ldots 1, A \ldots 2, \ldots, A \ldots k$. Khi đó $|A \ldots 1 \cup A \ldots 2 \cup \cdots \cup A \ldots k| = \sum \ldots i = 1^k |A \ldots i|$.

Bài toán 1. Tìm số hình vuông có cạnh nằm trên các lưới trong bảng 4×4.

Lời giải. Gọi S là tập các hình vuông trong bảng 4×4 và $S \ldots k$ là tập các hình vuông nằm trong bảng 4×4 có cạnh bằng k với $k = 1, 2, 3, 4$. Khi đó $|S| = |S \ldots 1| + |S \ldots 2| + |S \ldots 3| + |S \ldots 4|$

Ta có $|S\dots 1| = 16, |S\dots 2| = 9, |S\dots 3| = 4, |S\dots 4| = 1$.

Do đó $|S| = 16 + 9 + 4 + 1 = 30$.

Bài toán 2. Tìm số các cặp có thứ tự $(x;y)$ các số nguyên thoả mãn $x^2 + y^2 \leq 5$.

Lời giải. Mỗi $i = 0,1,2,3,4,5$ ta đặt $S\dots i = \{(x;y)|x^2 + y^2 = i\}$ khi đó tập cần tính số phần tử sẽ là hợp rời rạc của các $S\dots i$.

Bằng phương pháp liệt kê

$S\dots 0 = \{(0;0)\} \Rightarrow |S\dots 0| = 1$.

$S\dots 1 = \{(1;0),(1;0),(0;-1),(0;1)\} \Rightarrow |S\dots 1| = 4$

$S\dots 2 = \{(1;1),(1;-1),(-1;1),(-1;-1)\} \Rightarrow |S\dots 2| = 4$

$S\dots 4 = \{(0;2),(2;0),(0;-2),(-2;0)\} \Rightarrow |S\dots 4| = 4$

$|S\dots 3| = 0$

$S\dots 5 = \{(2;1),(2;-1),(-2;1),(-2;-1),(-1;2),(-1;-2),(1;2),(1;-2)\} \Rightarrow |S\dots 5| = 8$.

Vậy số cặp thỏa mãn bài toán là 21.

Quy tắc cộng vì thế sử dụng trong các tình huống ta phải phân trường hợp, phân phương án. Quy tắc cộng không giúp tăng tốc độ tính mà chỉ chia việc ra để xử lý song song.

Quy tắc nhân

Công việc A phải trải qua k công đoạn $A\dots 1, A\dots 2, \dots, A\dots k$.

$A\dots 1$ có thể thực hiện theo $n\dots 1$ cách,

$A\dots 2$ có thể thực hiện theo $n\dots 2$ cách,

$\dots$

$A\dots k$ có thể thực hiện theo $n\dots k$ cách.

Khi đó tổng số cách để thực hiện được công việc là $n\dots 1.n\dots 2\dots n\dots k = \prod\dots i = 1^k n\dots i$ cách.

Cách phát biểu 2

Cho k tập hợp khác rỗng $A\dots 1, A\dots 2, \dots, A\dots k$. Khi đó $|A\dots 1 \times A\dots 2 \times \cdots \times A\dots k| = \prod\dots i = 1^k |A\dots i|$.

Nhận xét 1. Quy tắc nhân vì thế phù hợp với các bài toán mà công việc có thể thực hiện tuần tự. Thực hiện hết mới xong công việc. Trong tình huống tập hợp có cấu trúc phức tạp thì ta phải sắp xếp lại hoặc chia nhỏ ra (sử dụng quy tắc cộng). Quy tắc nhân sẽ giúp chúng ta tăng đáng kể tốc độ đếm.

Nhận xét 2. Công đoạn sau phải xét trong trạng thái công đoạn trước đã thực hiện xong.

Bài toán 3. Có bao nhiêu số tự nhiên

a) Có 4 chữ số.

b) Có 4 chữ số khác nhau.

c) Có 4 chữ số sao cho hai chữ số liên tiếp thì khác nhau.

d) Chẵn có 4 chữ số.

Nhận xét 3. Hai quy tắc đếm thường được sử dụng kết hợp với nhau trong một bài toán.

Bài toán 4. (Đồng Nai) Chia mỗi của một hình vuông ra n đoạn thẳng bằng nhau bởi $(n-1)$ điểm chia khác nhau (không tính hai điểm đầu mút mỗi cạnh). Xét tứ giác có 4 đỉnh là 4 điểm chia trên bốn cạnh của hình vuông. Biết số tứ giác tạo thành và gấp 9 lần số các hình bình hành được tạo thành. Tìm giá trị của n?

Lời giải. Số tứ giác tạo thành là $(n-1)^4$ tứ giác.

Mỗi hình bình hành được tạo thành từ hai cặp điểm đối xứng nhau qua tâm của hình vuông ban đầu.

Do đó ta chỉ cần chọn hai đỉnh cho hình bình hành từ hai cạnh liên tiếp của hình vuông.

Tổng số hình bình hành là $(n-1)^2$.

Theo đề bài số tứ giác gấp 9 lần số hình bình hành nên ta có $(n-1)^4 = 9(n-1)^2 \Leftrightarrow n = 4$.

Bài toán 5. Cho $X = \{1; 2 \ldots..; 100\}$ và đặt $S = \{(a; b; c) \, | a, b, c \in X, a < b \wedge a < c\}$. Tính $|S|$ nếu

b, c không nhất thiết phải phân biệt.

b, c phân biệt.

Lời giải. Bài toán có thể chia thành các trường hợp phân biệt khi xét $a = 1; 2; \ldots; 99$.

Với $a = k \in \{1; 2; \ldots; 99\}$ thì số cách chọn b là $100 - k$ và c cũng là $100 - k$.

Thế thì số bộ số $(a; b; c)$ cần tìm là $(100-k)^2$. Vì k lấy giá trị 1,2,...,99 nên ta có

$|S| = \sum \ldots k = 1^{100}(100-k)^2 = \sum \ldots i = 1^{99} i^2 = 328350$.

Cách 1 Ta chọn $a = k \in \{1; 2; \ldots; 99\}$, với mỗi cách chọn a thì số cách b là $100 - k$ và số cách chọn c là $99 - k$.

Vậy ta có $|S| = \sum \ldots k = 1^{100}(100-k)(99-k) = \sum \ldots k = 1^{100}(k^2 - 199k + 9900) = 323400$.

Cách 2 (dùng tổ hợp) Ta thấy mỗi tập ba con gồm 3 số khác nhau của A cho ta hai bộ ba số thỏa mãn bài toán.

Vậy ta có $|S| = 2.C \ldots 100^3 = 323400$.

Bài toán 6. (HK lớp 9 Archimedes) Người ta muốn tô màu các hình tròn trong hình vẽ bên dưới bởi một trong ba màu xanh, đỏ hoặc vàng sao cho bất kỳ hai đường tròn nào được nối với nhau thì được tô bởi màu khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách tô như vậy.

Lời giải. Để dễ lý luận và trình bày ta đánh số các ô như sau

Ta thấy nhiều lựa chọn cho việc tô màu chẳng hạn

Có thể tô từ trong ra, hoặc tô từ nhánh bên ngoài vô, hoặc tô lan dần từ 1 nhánh.

Cách 1 Tô từ trong ra

Tô các ô 1,2,3,4 có 18 cách (đây là kết quả quen thuộc)

Ô số 5,6,7,8 mỗi ô có 1 cách tô.

Ô số 9,10,11,12 mỗi ô có 2 cách tô.

Tổng số cách tô là $18.2^4 = 288$.

Cách 2 Tô lan dần từ 1 nhánh, ta chọn xuất phát từ ô số 9.

CĐ1 Ô số 9 có 3 cách tô.

CĐ2 Ô số 5 có 2 cách tô.

CĐ3 Ô số 1 và số 2 có 2 cách tô.

CĐ4 Tiếp theo ta sẽ tô ô số 3 và ô số 4. Ta xét 3 trường hợp

TH4.1 ô số 3 cùng màu ô số 1 và ô số 4 thì cùng màu ô số 2.

TH4.2 ô số 3 cùng màu ô số 1 nhưng ô số 4 thì khác màu ô số 2.

TH4.3 ô số 3 khác màu ô số 1 nhưng ô số 4 thì cùng màu ô số 2.

Ta thấy trong mỗi trường hợp ô số 3 và ô số 4 chỉ có 1 cách tô.

CĐ4 có $1 + 1 + 1 = 3$ cách.

CĐ5 Ô số 8 có 1 cách, ô số 12 có 2 cách tô.

CĐ6 Ô số 6 có 1 cách, ô số 10 có 2 cách tô.

CĐ7 Ô số 7 có 1 cách, ô số 10 có 2 cách tô.

Vậy có tất cả $3.2.2.3.2^3 = 288$ cách.

Nhận xét 4. Nếu phân tích kỹ các dấu hiệu ta thấy việc tô hình vuông ở tâm là một bài toán quen thuộc đã từng gặp, từ đó đề ra hướng giải quyết là tô từ trong ra ngoài. Tuy vậy, việc sáng tạo đề ra thêm hai chiến thuật tô từ một nhánh và tô từ ngoài vào cũng dẫn đến một cách giải quyết thỏa đáng.

2 Cách cấu hình đếm cơ bản

Hoán vị Mỗi cách sắp xếp n phần tử có thứ tự từ tập hợp gồm đúng n phần tử là một hoán vị.

Định lý 1. Tổng số các hoán vị của n phần tử là $P \ldots n = n! = n.(n-1)(n-2)\ldots 2.1$

Quy ước $0! = 1$.

Bài toán 7. Có hai hàng ghế, mỗi hàng gồm 6 ghế. Cần sắp xếp 12 học sinh, trong đó có 6 học sinh trường A, và 6 học sinh trường B sao cho hai học sinh ngồi gần nhau hoặc đối diện nhau thì phải khác trường nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp chỗ ngồi.

Lời giải. Ta thấy ở mỗi hàng ghế học sinh được xếp xen kẻ theo trường và hai em đầu của mỗi hàng là khác nhau.

Công đoạn 1 Sắp xếp vị trí từng trường có 2 cách.

Công đoạn 2 Sắp 6 học sinh trường A vào chỗ dành cho học sinh trường A có 6! cách.

Công đoạn 3 Sắp 6 học sinh trường B vào chỗ dành cho học sinh trường B có 6! cách.

Vậy tổng số là $2.6!.6! = 1036800$cách.

Bài toán 8. Đội văn nghệ lớp 12AV gồm 4 nam và 6 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các bạn thành 1 hàng ngang để chụp hình sao cho các bạn nam không đứng cạnh nhau.

Lời giải.

Sắp xếp 6 bạn nữ ta có 6! cách.

Sắp xếp 6 bạn nam vào 7 vị trí xen kẻ các bạn nữ có $A \ldots 7^4$ cách. (gồm 5 vị tró xen giữa các bạn nữ và hai vị trí ở hai đầu)

Tổng số là $6!A \ldots 7^4 = 604800$ cách xếp thỏa mãn bài toán.

Nhận xét việc xếp các bạn nam trước cũng cho ta lời giải tuy nhiên hơi khó thực hiện.

Bài toán 9. Trong rạp xiếc có 1 con hổ, 1 gấu và 1 con khỉ. Để biểu diễn tiết mục người điều khiển xếp các con vật thành 1 hàng ngang. Em hãy liệt kê tất cả các cách sắp xếp có thể xảy ra hay không?

Để tăng thêm sự thu hút đối với khán giả người ta bổ sung thêm 2 sư tử, 1 chú chó và 1 chú khỉ con. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp tất cả các con vật biểu diễn thành hàng ngang sao cho hổ và gấu không ở cạnh nhau đồng thời hai chú khỉ luôn ở hai đầu.

Lời giải.

CĐ1 Sắp xếp hai chú khỉ con có 2 cách.

CĐ2 Sắp xếp 5 con vật còn lại ở giữa, ta thực hiện theo phần bù.

Sắp xếp 5 con vật tùy ý có 5! cách.

Sắp xếp 5 con vật sao cho hổ ở cạnh gấu có $2.4! = 48$ cách.

Vậy sô cách sắp xếp 7 con vật để biểu diễn là $2.\,(5! - 2.4!) = 144$ cách.

Bài toán 10. Trong ngày Valentine có 3 cặp tình nhân xếp thành 1 hàng dọc trước trung rạp chiếu phim Galaxy của siêu thị Vincom để chờ mua vé và nhận bắp ngô miễn phí. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp hàng khác nhau sao cho hai người yêu nhau luôn được đứng cạnh nhau.

Lời giải.

CĐ1 Sắp xếp 3 cặp có 3! cách.

CĐ2 Sắp xếp hai bạn nam nữ của mỗi cặp tại vị trí của cặp mình có $(2!)^3$ cách.

Tổng số là $3!.(2!)^3 = 48$ cách.

Hoán vị lặp Mỗi cách sắp xếp n phần tử có thứ tự từ tập hợp gồm đúng n phần tử, trong đó có $n \ldots 1$ phần tử giống nhau loại 1; $n \ldots 2$ phần tử giống nhau loại 2; $\ldots$; $n \ldots k$ phần tử giống nhau loại k là một hoán vị lặp.

Định lý 2. Tổng số các hoán vị lặp như thế là $H \ldots n = \dfrac{n!}{n \ldots 1!n \ldots 2! \ldots n \ldots k!}$.

Bài toán 11. Có bao nhiêu số có 6 chữ số mà tích các chữ số này bằng 8000?

Lời giải. Gọi số cần tìm là $\overline{abcdef}\ \ (a \neq 0)$.

Ta có $8000 = 2^6.5^3$.

Vì thế phải có ba chữ số 5 và 3 chữ số còn lại phải có tích là 2^6.

Ba chữ số còn lại này chỉ có thể thuộc 1 trong các bộ sau $(2,4,8)\,,(4,4,4)\,,(1,8,8)$.

Với bộ $(2,4,8,5,5,5)$ ta có $\dfrac{6!}{3!}$ số thỏa bài toán.

Với bộ $(4,4,4,5,5,5)$ ta có $\dfrac{6!}{3!.3!}$ số thỏa bài toán.

Với bộ $(1,8,8,5,5,5)$ ta có $\dfrac{6!}{2!.3!}$ số thỏa bài toán.

Tổng số các số cần tìm là $\dfrac{6!}{3!} + \dfrac{6!}{3!.3!} + \dfrac{6!}{2!.3!} = 200$ số.

Bài toán 12. (Đồng Nai TST 2012) Cho tập hợp S = 1,2,.,20. Tìm số các tập con T của S, biết rằng số phần tử của T bằng 4 và tổng các phần tử của T chia hết cho 3.

Lời giải. Phân hoạch S thành ba tập con A, B, C trong đó

A = 3,6,9,12,15,18 (gồm các số chia hết cho 3)

B = 1,4,7,10,13,16,19 (gồm các số chia cho 3 dư 1)

C = 2,5,8,11,14,17,20 (gồm các số chia cho 3 dư 2)

Gọi T là tập con thoả mãn yêu cầu bài toán, ta có các trường hợp sau

TH1 Có ba phần tử của T cùng thuộc B hoặc cùng thuộc C thì phần tử còn lại phải thuộc A. Khi đó số tập con T là $6.\dfrac{7!}{3!4!} + 6.\dfrac{7!}{3!4!} = 420$.

TH2 Có hai phần tử của T thuộc B suy ra hai phần tử còn lại thuộc C. Khi đó số tập con T là$\dfrac{7!}{2!5!}.\dfrac{7!}{2!5!} = 441$.

TH3 Có một phần tử của T thuộc B suy ra ba phần tử còn lại có hai thuộc A và một thuộc C.

Khi đó số tập con T là$7.\dfrac{6!}{2!4!}.7 = 735$.

TH4 Không có phần tử của T thuộc B suy ra cả bốn phần tử đều thuộc A. Khi đó số tập con T là $C\ldots6^4 = 15$.

Vậy số tập con T thoả mãn đề bài là $420 + 441 + 735 + 15 = 1611$ tập.

Bài toán 13. Tìm tổng tất cả các số nguyên dương có bốn chữ số nhưng không có chữ số 3 và chia hết cho 3.

Lời giải. Gọi T là tập hợp tất cả các số nguyên dương có bốn chữ số nhưng không có chữ số 3 và chia hết cho 3. Gọi $A = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$.

Nhận thấy trong A có đúng 3 số có cùng số dư r khi chia cho 3; $r \in \{0;1;2\}$.

Gọi $a = \overline{a\dots 1a\dots 2a\dots 3a\dots 4}$

Với mỗi $a\dots 4 \in A$ cố định thì Chọn $a\dots 1 \in A\setminus\{0\}$ có 8 cách, chọn $a\dots 2 \in A$ có 9 cách.

Khi đó có 3 cách chọn $a\dots 3 \in A$ để $(a\dots 1 + a\dots 2 + a\dots 3 + a\dots 4)$ chia hết cho 3.

Với mỗi chữ số $a\dots 4 \in A$ có trong $8.9.3 = 216$ số thuộc T. Tương tự mỗi chữ số $a\dots 2; a\dots 3 \in A$ có trong 216 số thuộc T. Với mối số $a\dots 1 \in A \setminus \{0\}$ có trong $9.9.3 = 243$ số thuộc T.

Vậy $\sum\dots a \in Ta = (1{+}2{+}4{+}5{+}6{+}7{+}8{+}9)\,243.10^3{+}216\left(10^2{+}10+1\right) = 11212992.$

Chỉnh hợp Mỗi bộ k phần tử có thứ tự được chọn ra từ tập gồm n phần tử là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Định lý 3. Tổng số các chỉnh hợp chập k của n phần tử là$A\dots n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)\dots(n-k+1)$.

Dễ thấy $A\dots n^0 = 1;\ A\dots n^1 = n;\ A\dots n^n = P\dots n = n!$

Bài toán 14. Giả sử $A = \{a\dots 1, a\dots 2, \dots, a\dots n\}$ và $k \le n$. Xét tập T2 = $(a\dots i\dots 1, a\dots i\dots 2, \dots, a\dots i\dots k)$ có thứ tự $\mid a\dots i\dots j \in A, \forall j = \overline{1,k}$, các $a\dots i\dots j \in A, \forall j = \overline{1,k}$ đôi một khác nhau. Tìm $|T\dots 2|$?

Lời giải. Ta có $|T\dots 2| = n.(n-1).(n-2)\dots.(n-k+1)$.

Bài toán 15. Tìm số đơn ánh từ một tập A có k phần tử đến một tập B có n phần tử $(k \le n)$.

Lời giải. Mỗi ánh xạ f là một cách chọn ảnh của k phần tử x thuộc A.

Do đơn ánh nên ảnh của hai phần tử $x\dots 1, x\dots 2 \in A$ là hai phần tử phân biệt thuộc B.

Mà mỗi cách k ảnh cho k phần tử thuộc A chính là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của B.

Vậy tổng số đơn ánh cần tìm là $A\dots n^k$.

Chỉnh hợp lặp Mỗi bộ k phần tử có thứ tự được chọn ra từ tập gồm n phần tử mà mỗi phần tử lấy từ n phần tử đã cho có thể có mặt nhiều lần là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.

Định lý 4. Tổng số các chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử là$\overline{A\dots n^k} = n^k$. Một số tài liệu cón kí hiệu là $F\dots n^k$.

Bài toán 16. Xét tập T1 = $(a\dots i\dots 1, a\dots i\dots 2, \dots, a\dots i\dots k)$ có thứ tự $\mid a\dots i\dots j \in A, \forall j = \overline{1,k}$ không bắt buộc đôi một khác nhau. Tìm $|T\dots 1|$?.

Lời giải. Mỗi phần tử của $T\dots 1$ là phần tử của tích đề các $T\dots 1 = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}\dots k = A^k \Rightarrow |T\dots 1| = \left|A^k\right| = |A|^k = n^k$.

Bài toán 17. Trên một đường thẳng cho trước lần lượt từ trái qua phải lấy các điểm $A\dots 1, A\dots 2, \dots, A\dots 2023$. Tô 2023 điểm vừa nêu bởi 8 màu sao cho trong mỗi cách tô mỗi điểm chỉ được tô một màu. Hai cách tô như thế được gọi là khác nhau nếu tồn tại điểm $A \ldots i$ sao cho nó được tô bởi hai màu khác nhau trong hai cách tô đó. Hỏi có bao nhiêu cách tô màu như thế.

Lời giải. Mỗi điểm có 8 cách tô. Vì vậy tổng số cách tô sẽ là 8^{2023}.

Bài toán 18. Cho k và n là các số nguyên dương. Một dãy $k-$ phân độ dài n là một dãy $(a \ldots 1, a \ldots 2, a \ldots 3, \ldots, a \ldots n)$ với $a \ldots 1, a \ldots 2, \ldots, a \ldots n \in \{0, 1, \ldots, \ k-1\}$. Hỏi có bao nhiêu dãy này?

Lời giải. Đặt $A = \{0, 1, \ldots, k-1\}$. Mỗi dãy $k-$ phân độ dài n là một chỉnh hợp lặp chập n của k phần tử của A.

Vậy tổng số dãy là k^n.

Tổ hợp   Mỗi bộ k phần tử không phân biệt thứ tự được chọn ra từ tập gồm n phần tử là một tổ hợp chập k của n phần tử.(mỗi bộ này xem như 1 tập con).

Định lý 5. Tổng số các tổ hợp chập k của n phần tử là $C \ldots n^k = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \dfrac{n\,(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$.

Dễ thấy $C \ldots n^0 = C \ldots n^n = 1$; $C \ldots n^1 = C \ldots n^{n-1} = n$;

Tính chất $C \ldots n^k = C \ldots n^{n-k}$; $C \ldots n - 1^k + C \ldots n - 1^{k-1} = C \ldots n^k$; $A \ldots n^k = C \ldots n^k . k!$.

Bài toán 19. Giả sử $A = \{a \ldots 1, a \ldots 2, \ldots, a \ldots n\}, k \leq n$. Xét tập T3 = $(a \ldots i \ldots 1, a \ldots i \ldots 2, \ldots, a \ldots i \ldots k)$ không có thứ tự | $a \ldots i \ldots j \in A, \forall j = \overline{1,k}$, các $a \ldots i \ldots j \in A, \forall j = \overline{1,k}$ đôi một khác nhau.

Tìm $|T \ldots 3|$?

Lời giải. Mỗi phần tử của $T \ldots 3$ hoán vị sẽ sinh ra $k!$ phần tử của $T \ldots 2$.

Giả sử $(a \ldots i \ldots 1, a \ldots i \ldots 2, \ldots, a \ldots i \ldots k)$ của $T \ldots 3$ hoán vị sẽ sinh ra $k!$ của $T \ldots 2$ và gọi tập chứa các phần tử này là $T \ldots i \ldots 1, i \ldots 2, \ldots, i \ldots k$.

Trong đó $T \ldots i \ldots 1, i \ldots 2, \ldots, i \ldots k = \{t \in T \ldots 2 |$t được tạo nên từ k phần tử $a \ldots i \ldots 1, a \ldots i \ldots 2, \ldots, a \ldots i \ldots k\}$

Gọi tập tất cả các tập $T \ldots i \ldots 1, i \ldots 2, \ldots, i \ldots k$này là tập $T' \ldots 2$.

Các tập $T \ldots i \ldots 1, i \ldots 2, \ldots, i \ldots k$này rời nhau và $T \ldots 2 = \bigcup \ldots (i \ldots 1, i \ldots 2, \ldots, i \ldots k) T \ldots i \ldots 1, i \ldots 2, \ldots, i \ldots k$. Ta thiết lập ánh xạ f từ T3 vào $T' \ldots 2$. f biến $(a \ldots i \ldots 1, a \ldots i \ldots 2, \ldots, a \ldots i \ldots k)$ thành $T \ldots i \ldots 1, i \ldots 2, \ldots, i \ldots k$(tương ứng với nó). Dễ thấy f là một song ánh từ đó suy ra $|T \ldots 3| = |T' \ldots 2| = \dfrac{|T \ldots 2|}{k!}$.

Bài toán 20. Có một lưới gồm các ô vuông. Các nút được đánh số từ 0 đến m theo chiều tứ trái sang phải và từ 0 đến n theo chiều từ dưới lên trên. Hỏi có bao nhiêu đường đi khác nhau từ nút $(0,0)$ đến nút (m,n) nếu chỉ cho phép đi trên cạnh các ô vuông theo chiều tứ trái sang phải hoặc từ dưới lên trên?

Lời giải. Một đường đi như thế coi như là một đường gồm $m+n$ đoạn (mỗi đoạn là một cạnh ô vuông). Tại mỗi đoạn chỉ được chọn là một trong hai giá trị đi lên (ta mã hóa số 1) hay sang phải (ta mã hóa số 0). Số đoạn đi lên đúng bằng n và số đoạn sang phải đúng bằng m. Bài toán dẫn đến việc tìm xem có bao nhiêu dãy nhị phân độ dài $m+n$ trong đó có đúng n số 1. Kết quả là $C \ldots m+n^n$.

Bài toán 21. Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n thỏa mãn hai điều kiện Trong xâu có đúng k chữa số 1 $(0 < k < n)$;

Không có hai chữ số 1 nào đứng cạnh nhau.

Lời giải. Xét một xâu nhị phân thỏa mãn yêu cầu bài toán ta bỏ ra khỏi xâu nhị phân đó $k-1$ số 0 (bằng cách cứ giữa hai số 1 ta bỏ đi một chữ số 0). Khi đó ta còn lại một xâu nhị phân độ dài $n-k+1$, gồm có k số 1.

Ngược lại, một xâu nhị phân độ dài $n-k+1$, gồm có k số 1, ta chỉ việc đặt vào giữa hai số 1 liên tiếp một chữ số 0 thì ta sẽ được một xâu thỏa mãn yêu cầu bài toán. Vậy số xâu cần tìm bằng với số xâu nhị phân độ dài $n-k+1$, trong đó có k chữ số 1 và bằng $C \ldots n-k+1^k$.

Nhận xét 5. với cách làm tương tự, nhưng điều kiện thứ 2 thay đổi thành "Giữa hai chữ số 1 liên tiếp có $\geq$ m số 0" thì kết quả trở thành $C \ldots n-m\,(k-1)^k$. Và nếu ta sửa điều kiện thứ 2 thành "Giữa hai chữ số 1 liên tiếp có $\geq$ m số 0 và trước chữ số 1 đầu tiên có $\geq$ m chữ số 0" thi thu được kết quả $C \ldots n-mk^k$.

Nhận xét 6. Có thể suy nghĩ cách giải bằng phương pháp truy hồi.

Bài toán 22. Alice leo cầu thang gồm 9 bậc. Alice có thể bước 1 hoặc 2 bậc mỗi lần, chỉ bước lên không bước xuống. Alice có thể leo cầu thang 9 bậc này bằng bao nhiêu cách khác nhau?

Lời giải. Nhận xét đây là một bài toán khá quen thuộc và thường được giải theo phương pháp đếm bằng truy hồi. Nhưng hôm nay chúng ta sẽ cùng nhìn bài toán với góc nhìn mới và đếm bằng các công cụ tương đối thô sơ hơn.

Ta thấy số lần bước 1 bậc và số lần bước 2 bậc có sự liên hệ với nhau, cụ thể nếu đặt a là số lần bước 1 bậc và b là số lần bước 2 bậc thì ta luôn có $a+b=9$. Vì vậy hhi biết số lần bước 1 bậc và số lần bước 2 bậc thì việc cuối cùng là sắp thứ tự bước 1 bậc và bước 2 bậc ở những lần nào sẽ cho chúng ta số cách bước lên cầu thang của Lan.

TH1 chỉ bước 1 bậc mỗi lần có 1 cách bước như thế.

TH2 1 lần 2 bậc và 7 lần 1 bậc. Ta có 8 lần thực hiện có thể minh họa bởi 8 ô

Ta chọn 1 ô để thực hiện bước 2 bậc ở lần đó vậy có $C \ldots 8^1$ cách bước như thế.

TH3 2 lần 2 bậc và 5 lần 1 bậc tương tự TH2 ta có $C \ldots 7^2$ cách bước như thế.

TH4 3 lần 2 bậc và 3 lần 1 bậc có $C \ldots 6^3$ cách bước như thế.

TH5 4 lần 2 bậc và 1 lần 1 bậc có $C \ldots 5^4$ cách bước như thế.

Vậy tổng số cách bước cầu thang của Alice là $1 + C \ldots 8^1 + C \ldots 7^2 + C \ldots 6^3 + C \ldots 5^4 = 55$.

Bài toán 23. Trên mặt phẳng cho 20 điểm trong đó không có 3 điểm nào thẳng hàng. Giả sử trong các đường thẳng đi qua 20 điểm đã cho không có hai đường thẳng nào song song và cũng không có ba đường thẳng nào đồng quy tại một điểm khác với 20 điểm đã cho. Hãy tính số tam giác tạo bởi các đường thẳng đó mà mỗi tam giác đều không có đỉnh là một trong 20 điểm đã cho.

Lời giải.

Số đường thẳng là $C\ldots 20^2 = 190$.

Số tam giác tạo thành tùy ý là $C\ldots 190^3 - 20.C\ldots 19^3$. (ba đường thẳng cùng qua 1 đỉnh không tạo thành một tam giác)

Ta đi tìm các tam giác vi phạm đề bài, nghĩa là tam giác có ít nhất một đỉnh là các điểm trong 20 điểm đã cho.

TH1 Số tam giác có 3 đỉnh là 3 điểm trong 20 điểm đã cho là $C\ldots 20^3$.

TH2 Số tam giác có 2 đỉnh là 2 điểm trong 20 điểm đã cho là $C\ldots 20^2.18.17$ (chọn 2 điểm A và B từ 20 điểm, chọn hai đường thẳng tạo ra hai cạnh còn lại, một đường từ A khác AB giả sử là đường AC và một đường từ B khác BA và khác luôn BC).

TH3 Số tam giác có 1 đỉnh là 1 điểm trong 20 điểm đã cho là $C\ldots 20^1.C\ldots 19^2.(190 - 3.19)$ (chọn 1 điểm A từ 20 điểm, chọn 2 đường thẳng trong các đường thẳng qua A có$C\ldots 19^2$ cách lập được hai cạnh AB, AC, chọn thêm 1 cạnh thứ 3 không qua điểm nào trong ba điểm A,B,C có $190 - 3.19$).

Vậy tổng số tam giác thỏa mãn bài toán là $C\ldots 190^3 - 20.C\ldots 19^3 - C\ldots 20^3 - C\ldots 20^2.18.17 - C\ldots 20^1.C\ldots 19^2.(190 - 3.19)$.

Bài toán 24. (Thử thách mùa hè 2023 Pleiku Gia Lai) Cho bảng ô vuông 20×101 gồm 20 hàng và 101 cột. Người ta muốn điền các số 0 và 1 vào các ô vuông đơn vị của bảng thỏa mãn các điều kiện sau

Mỗi ô vuông có đúng một số được điền.

Mỗi cột được điền đúng 2 số 1.

Hai hàng bất kì có không quá một cột được điền hai số 1.

Hỏi có tất cả bao nhiêu cách điền số thỏa mãn.

Lời giải. Từ yêu cầu, vị trí cặp số 1 ở mỗi cột là khác nhau (tính theo hàng). Với 20 cột, chúng ta có $C\ldots 20^2 = 190$ vị trí cho cặp số 1. Do đó, số cách điền thỏa mãn yêu cầu bài toán là $A\ldots 190^{101} = \dfrac{190!}{89!}$.

Bài toán 25. (IMO Shortlist 2016) Cho đa giác đều (H) có 2017 đỉnh mà mỗi đỉnh được tô bởi một trong ba màu xanh, đỏ, vàng với số lượng lần lượt là a, b, c sao cho các số a, b, c đều lẻ. Gọi x, y, z lần lượt là số tam giác cân có ba đỉnh thuộc (H) mà các đỉnh của mỗi tam giác được tô bởi một màu, hai màu, ba màu.

a) Chứng minh rằng $3x + y = 3\left(C\ldots a^2 + C\ldots b^2 + C\ldots c^2\right)$.

b) Chứng minh rằng $z > 0$.

Lời giải.

a) Trước hết, ta nhận xét rằng với hai đỉnh tùy ý trong 2017 đỉnh của (H) thì có đúng 3 cách chọn đỉnh thứ ba để có tam giác cân.

Thật vậy, giả sử có hai đỉnh A, B và cung nhỏ AB chứa trong đó x điểm. Trước hết, vì 2017 lẻ nên trên cung lớn hoặc trên cung nhỏ AB sẽ có đúng một điểm C cách đều A, B. Ngoài ra, đường tròn (A, AB) và (B, BA) cắt (H) tại các điểm D, E cũng thỏa mãn yêu cầu.

Chú ý rằng $(2017, 3) = 1$ nên không có tam giác đều nào trong các đỉnh của (H), suy ra các điểm C, D, E ở trên là duy nhất. Từ đó, ta đếm số bộ $(M, NP,)$ với đỉnh M N, không tính thứ tự, tô cùng màu và cùng nằm trong tam giác cân P.

- Chọn hai đỉnh M N, cùng màu, có $C \ldots a^2 + C \ldots b^2 + C \ldots c^2$ cách. Chọn tam giác P cân và chứa hai đỉnh đó, có thêm 3 cách nên số bộ trên là 3. $\left(C \ldots a^2 + C \ldots b^2 + C \ldots c^2\right)$

- Một tam giác loại x, y, z cho ta tương ứng $3, 1, 0$ cặp đỉnh cùng màu nên có $3x + y$ bộ. Từ đó, ta có đẳng thức đã nêu.

b) Giả sử $z = 0$ thì $x + y = C \ldots 2017^2$ là số cách chọn ra ba đỉnh trong (H) để có tam giác cân.

Khi đó, từ đẳng thức ở a, ta có $\dfrac{3}{2}\left[a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c)\right] = 3(x + y) - 2y$.

Chú ý rằng $a + b + c = 2017$ nên $3\left(a^2 + b^2 + c^2 - 2017\right) = 3\left(2017^2 - 2017\right) - 4y$

$\Leftrightarrow 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right) = 3.2017^2 - 4y \Rightarrow 3\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$

$\equiv 3.2017^2 \pmod 4$.

Tuy nhiên a, b, c lẻ nên vế trái chia 4 dư 1, còn vế phải chia 4 dư 3. Điều mâu thuẫn này cho thấy $z > 0$.

Tổ hợp lặp   Mỗi bộ k phần tử không phân biệt thứ tự được chọn ra từ tập gồm n phần tử mà mỗi phần tử lấy từ n phần tử đã cho có thể có mặt nhiều lần là một tổ hợp lặp chập k của n phần tử

Hai tổ hợp lặp được gọi là khác nhau nếu số lần xuất hiện của hai phần tử cùng loại trong hai tổ hợp là khác nhau.

Định lí   Tổng số các tổ hợp lặp chập k của n phần tử là $\overline{C} \ldots n^k = C \ldots n + k - 1^{n-1}$ hoặc $\overline{C} \ldots n^k = C \ldots n + k - 1^k$.

Bài toán 26. (Khảo sát năng lực giáo viên THPT chuyên Nguyễn Đình Chiểu năm 2021)

Có bao nhiêu cách lập một số tự nhiên có ba chữ số $\overline{abc}$ thỏa mãn $a \leq b \leq c$.

Lời giải. Cách 1   Chữ số 0 không được chọn (vì nếu chọn thì nó sẽ đứng đầu). Ta có thể lấy ra bộ 3 chữ số từ 1 đến 9, các chữ số có thể bằng nhau, sau đó sắp xếp lại thì mỗi bộ theo chiều tăng dần thì ta sẽ được 1 số thỏa mãn bài toán.

Mỗi số thỏa điều kiện bài toán chính là một tổ hợp lặp chập 3 của 9 phần tử. Suy ra, tổng số các số là tổng số tổ hợp lặp chập 3 của 9 phần tử. Vậy kết quả của bài toán là $K \ldots 9^3 = C \ldots 11^3 = 165$.

Cách 2

TH1 $a < b < c$lúc này mỗi số tự nhiên lập được tương ứng với một tổ hợp chập 3 của 9 phần tử. Tổng số là $C \ldots 9^3$.

TH2 $a = b < c$ lúc này mỗi số tự nhiên lập được tương ứng với một tổ hợp chập 2 của 9 phần tử. Tổng số là $C \ldots 9^2$.

TH3 $a < b = c$ lúc này mỗi số tự nhiên lập được tương ứng với một tổ hợp chập 2 của 9 phần tử.

Tổng số là $C \ldots 9^2$.

TH4 $a = b = c$ lúc này có 9 số thỏa mãn.

Vậy số các số tự nhiên thỏa mãn bài toán là $C \ldots 9^3 + 2.C \ldots 9^2 + 9 = 165$số.

Cách 3 (song ánh)

Với mỗi bộ (a, b, c), $1 \leq a \leq b \leq c \leq 9$ thỏa mãn bài toán. Ta thiết lập một ánh xạ như sau f $(a, b, c) \to (a', b', c')$ thỏa $a' = a, b' = b + 1, c' = c + 2$.

Dễ thấy f là một song ánh.

Từ đó suy ra số bộ (a, b, c) chính bằng số bộ (a', b', c').

Ta có $1 \leq a' < b' < c' \leq 11$.

Số cách chọn bộ (a', b', c') chính bằng số tổ hợp chập 3 của 11 phần tử.

Do đó tổng số các số tự nhiên thỏa mãn bài toán là $C \ldots 11^3 = 165$.

Kỹ thuật sắp xếp công đoạn phù hợp

Trong bài toán đếm đôi lúc việc sắp xếp công đoạn giúp ta có cách giải quyết dễ dàng hơn.

Bài toán 27. Có bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số khác nhau trong đó số chữ số chẵn bằng với số chữ số lẻ.

Lời giải.

Cách 1 Gọi $\overline{abcdef}$ là số cần lập.

Ta chia ra hai trường hợp theo tính chẵn lẻ của a.

TH1 có chữ số 0

Chọn vị trí cho số 0 có 5 cách (a khác 0).

Chọn 2 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ còn lại ta có $C \ldots 4^2.C \ldots 5^3$cách chọn.

Sắp xếp 5 chữ số còn lại ta có 5! cách.

TH2 không có chữ số 0

Chọn 3 chữ số lẻ và 3 chữ chẵn (khác 0) ta có $C \ldots 4^3.C \ldots 5^3$cách chọn.

Sắp xếp 6 chữ số ta có 6! cách.

Vậy tổng số là $5.C \ldots 4^2.C \ldots 5^3.5! + C \ldots 4^3.C \ldots 5^3.6! = 64800$số.

Cách 2 Gọi $\overline{abcdef}$ là số cần lập.

Ta tìm các số có 6 chữ số khác nhau gồm 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ kể cả số 0 đứng đầu.

Chọn 3 chữ số lẻ và 3 chữ chẵn ta có $C \ldots 5^3.C \ldots 5^3$cách chọn.

Sắp xếp 6 chữ số ta có 6! cách.

Ta tìm các số có dạng $\overline{0bcdef}$ mà trong đó 6 chữ số khác nhau gồm 3 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ.

Chọn 2 chữ số chẵn và 3 chữ số lẻ còn lại ta có $C\ldots4^2.C\ldots5^3$cách chọn.

Sắp xếp 5 chữ số còn lại ta có 5! cách.

Vậy tổng là $C\ldots5^3.C\ldots5^3.6! - C\ldots4^2.C\ldots5^3.5! = 64800$số.

Phân tích

Lời giải 1 dựa vào mâu thuẩn về việc có và không có sự xuất hiện của chữ số 0.

Lời giải 2 dùng đến phương pháp bù trừ, chấp nhận số 0 đứng đầu để giảm độ phức tạp của vấn đề cần tính, sau đó tìm cách trừ ra phần đã vi phạm yêu cầu của bài toán để được kết quả đúng.

Bài toán 28. Xác định số các cặp số có thứ tự $(a;b)$ sao cho bội chung nhỏ nhất của a và b là $2^3.5^7.11^{13}$.

Lời giải. Cả a,b đều là ước của $2^3.5^7.11^{13}$ nên $\begin{cases} a = 2^x5^y11^z \\ b = 2^s5^t11^u \end{cases}$

Vì $2^3.5^7.11^{13}$ là bội chung nhỏ nhất của a,b nên $\max\{x,s\} = 3$; $\max\{y,\} = 7$; $\max\{z,u\} = 13$.

Bằng cách liệt kê ta có 7 cách chọn cặp (x,s) ; 15 cách chọn (y,t) ; 27 cách chọn (z,u) .

Theo qui tắc nhân, ta được $7.15.27 = 2835$ cặp số (a,b) thỏa điều kiện.

Mở rộng Nếu n là số nguyên dương và $n = p\ldots1^{\alpha\ldots1}.p\ldots2^{\alpha\ldots2}\ldots\ldots p\ldots k^{\alpha\ldots k}$là phân tích thành thừa số nguyên tố của n.

Thì sẽ có $(2\alpha\ldots1+1)(2\alpha\ldots2+1)\ldots\ldots(2\alpha\ldots k+1)$cặp số nguyên (a,b) phân biệt có thứ tự sao cho bội chung nhỏ nhất (a,b) là n.

Bài toán 29. Cho tập hợp $A = \{1,2,3,\ldots,100\}$. Ta tô màu các số của A chia hết cho 10 là màu đỏ, các số còn lại bởi màu xanh. Hỏi có bao nhiêu bộ (x,y,z) mà x,y,z đều thuộc A trong hai trường hợp sau $x+y+z$ chia hết cho 100.

x,y,z được tô cùng màu và $x+y+z$ chia hết cho 100.

Lời giải. Ta có thể chọn x,y bất kì có 100.100 cách chọn

Ứng với mỗi cách chọn x,y ta có $x+y \equiv k \pmod{100}$ với $0 \le k \le 99$

Với mỗi số k như thế ta có một cách chọn $z = 100-k$ để $x+y+z \equiv 0 \pmod{100}$

Vậy có 10000 bộ x,y,z thỏa đề bài.

Có 10 số màu đỏ $\{10,20,\ldots,100\}$ và 90 số màu xanh.

Gọi (x,y,z) là bộ mà $x+y+z$ chia hết cho 100 và trong bộ có cả 2 màu. Trong x,y,z không thể có 2 số cùng màu đỏ. Ta chỉ có các trường hợp sau

Ta ưu tiên chọn số đỏ trước cho mỗi trường hợp.

Do đó các số loại này là $3.10.90.1 = 2700$ bộ

Vậy các bộ số thỏa đề bài là $10000 - 2700 = 7300$ bộ.

Nhận xét Nếu làm trực tiếp thì trường hợp x, y, z cùng màu xanh rất khó quả lí vì thế ta nghĩ đến ý tưởng sử dụng phần bù.

Kỹ thuật chia trường hợp

Để giảm độ phức tạp của bài toán ta cũng thường chia nhỏ bài toán ra nhiều trường hợp (phân hoạch). Giải bài toán đơn giản hơn trên từng trường hợp cụ thể. Một ý tưởng khá thường gặp nhưng giúp học sinh định hướng tốt trong những bài toán đếm phức tạp. Đôi lúc việc nắm rõ nguyên nhân của các mâu thuẩn giúp chúng ta có cách chia trường hợp tốt.

Bài toán 30. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ta lập được bao nhiêu số tự nhiên có 6 chữ số, mà các chữ số đôi một khác nhau và trong đó hai chữ số kề nhau không cùng là số lẻ?

Lời giải. Gọi số đó là $A = \overline{a \ldots 1a \ldots 2a \ldots 3a \ldots 4a \ldots 5a \ldots 6}$. Từ giả thiết suy ra A có 1 hoặc 2 hoặc 3 chữ số lẻ.

TH1 A có 1 chữ số lẻ

+) $a \ldots 1$ lẻ Số các số A là $C \ldots 5^1 P \ldots 5 = 600$

+) $a \ldots 1$ chẵn Có 4 cách chọn $a \ldots 1$. Số các số A là $4.(C \ldots 5^1 C \ldots 4^4) P \ldots 5 = 2400$

Tổng có 600 + 2400 = 3000 số các số A trong đó có đúng một chữ số lẻ.

TH2 A có 2 chữ số lẻ

+) $a \ldots 1$ lẻ Có 5 cách chọn $a \ldots 1$. Có 5 cách chọn $a \ldots 2$ chẵn.

Vậy số các số A là $5.5.(C \ldots 4^1 C \ldots 4^3) P \ldots 4 = 9600$.

+) $a \ldots 1$ chẵn Có 4 cách chọn $a \ldots 1$. Có 6 cách chọn hai vị trí không kề nhau của hai số lẻ trong $a \ldots 2$ $a \ldots 3$ $a \ldots 4$ $a \ldots 5$ $a \ldots 6$. Vậy số các số A là $4.(C \ldots 5^2.6.P \ldots 2).A \ldots 4^3 = 11520$.

Tổng có 9600 + 11520 = 21120 số các số A.

TH3 A có 3 chữ số lẻ

+) $a \ldots 1$ lẻ Có 5 cách chọn $a \ldots 1$. Có 5 cách chọn $a \ldots 2$. Có 3 cách chọn hai vị trí không kề nhau của hai số lẻ trong $a \ldots 3$ $a \ldots 4$ $a \ldots 5$ $a \ldots 6$. Vậy số các số A là $5.5.(C \ldots 4^2.3.P \ldots 2).A \ldots 4^2 = 10800$.

+) $a \ldots 1$ chẵn Có 4 cách chọn $a \ldots 1$. Có 1 cách chọn 3 vị trí không kề nhau của 3 số lẻ trong $a \ldots 2$ $a \ldots 3$ $a \ldots 4$ $a \ldots 5$ $a \ldots 6$. Vậy số các số A là $4.(C \ldots 5^3.1.P \ldots 3).A \ldots 4^2 = 2880$.

Tổng có 10800 + 2880 = 13680 số các số A.

Tóm lại có 3000 + 21120 + 13680 = 37800 số các số A.

Nhận xét sự phối hợp của các cấu hình quen thuộc dựa trên nền tảng quy tắc cộng và quy tắc nhân xuất hiện khá đầy đủ trong lời giải trên.

Bài toán 31. Có bao nhiêu cách tô màu hình vuông $n \times n$ bằng cách tô đỏ hoặc trắng sau cho các ô vuông 2×2 có đúng hai ô được tô màu đỏ.

Lời giải. Nhận xét Quy trình ta sẽ tô từng hàng một.

Nếu hàng phía trên tô xen kẻ thì hàng bên dưới có 2 cách tô (vẫn tô xen kẻ).

Nếu hàng phía trên không tô xen kẻ thì hàng phía dưới chỉ có 1 cách tô (tô ngược lại với hàng bên trên).

Do vậy ta cần chia ra 2 trường hợp để thực hiện như sau

TH1 Tô hàng đầu xen kẻ có 2 cách tô.

Các hàng bên dưới mỗi hàng đều có hai cách tô.

TH2 Tô hằng đầu không xen kẻ có $2^n - 2$ cách tô. $n-1$ hàng còn lại mỗi hàng chỉ có 1 cách tô.

Vậy có tất cả $2^n + 2^n - 2 = 2^{n+1} - 2$ cách tô thỏa mãn bài toán.

Bài toán 32. (Khảo sát năng lực giáo viên THPT chuyên Nguyễn Đình Chiểu năm 2020)

Cho một hình vuông 2×2 như hình vẽ. Mỗi hình vuông đơn vị có thể tô bằng 1 trong 4 màu xanh, đỏ, vàng, trắng. Hỏi có bao nhiêu cách tô sao cho hai hình vuông có chung cạnh thì có màu khác.

Lời giải. Cách 1 (quản lí số màu tô)

TH1 Dùng 2 màu tô

Chọn 2 màu có $C \ldots 4^2$ cách.

Tô vào hình có 2!cách (hai ô chéo nhau phải cùng 1 màu).

Tổng số là $C \ldots 4^2.2! = 12$cách.

TH2 Dùng 3 màu tô

Chọn 3 màu có $C \ldots 4^3$ cách.

Tô vào hình (chọn 1 màu để tô 2 ô có $C \ldots 3^1$ cách, tô màu này có 2 cách, tô hai màu còn lại có 2! cách)

Tổng số là $C \ldots 4^3 C \ldots 3^1.2.2! = 48$cách.

TH3 Dùng 4 màu tô có $4! = 24$ cách.

Tổng số là $12 + 48 + 24 = 84$ cách.

Cách 2 (chia thật nhiều trường hợp nếu gặp khó, không đơn trị)

Ta đánh số các ô như hình

CĐ1 Tô ô số 1 có 4 cách

CĐ2 Tô ô số 2 và 3 ta chia ra hai trường hợp

TH1 ô số 2 và 3 cùng màu tô màu hai ô này có 3 cách lúc này ô số 4 chỉ còn lại 3 cách tô (ô 4 chỉ cần khác 1 màu đã tô ở ô 2 và 3).

TH2 ô số 2 và 3 khác màu tô màu hai ô này có $C \ldots 3^2.2!$ cách lúc này ô số 4 chỉ còn lại 2 cách tô (ô 4 phải khác2 màu đã tô ở ô 2 và 3).

Vậy tổng số cách tô là $4.\left(3.3 + C \ldots 3^2.2!.2\right) = 4.\left(9+12\right)4.21 = 84$ cách.

Kết hợp nguyên lý IE (bù trừ).

Nguyên lí bù trừ dùng để dếm số phần tử hợp nhiều tập thành phần. Ta sử dụng khi gặp các tập thành phần có chồng lấn lên nhau, giao nhau khác rỗng.

Công thức trong trường hợp 2 hoặc 3 tập thành phần

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$.

Nguyên lí bù trừ vẫn đúng với n tập bất kì.

Bài toán 33. Cho tập S có n phần tử. Có bao nhiêu cách chọn 2 tập con không nhất thiết phân biệt của S sao cho hợp hai tập con đó bằng S. Không kể đến thứ tự các tập con đó.

Lời giải. Xét tập S có n phần tử. Xét một cách tạo ra 2 tập A, B là các tập con của S mà $A \cup B = S$. Khi đó với một phần tử s bất kỳ của S, chỉ có 3 sự lựa chọn $s \in A, s \notin B; s \in B, s \notin A; s \in A; s \in B$.

Thực hiện thao tác chọn lựa như vậy trên tất cả n phần tử của S, ta có 3^n cách. Tuy nhiên, với mỗi 2 tập A, B phân biệt, chúng sẽ bị tính 2 lần do thứ tự A, B hoặc B, A. Ngoài ra, khi $A = B$ thì $A = B = S$ nên có duy nhất 1 cách. Vậy số cách chọn là $\dfrac{3^n - 1}{2} + 1$ cách.

Bài toán 34. Ta nói một dãy số dạng $d \ldots 1d \ldots 2d \ldots 3 - d \ldots 4d \ldots 5d \ldots 6d \ldots 7$ là dễ nhớ nếu $d \ldots 1d \ldots 2d \ldots 3$ giống với một trong hai dãy $d \ldots 4d \ldots 5d \ldots 6$ hoặc $d \ldots 5d \ldots 6d \ldots 7$. Biết các số $d \ldots i$ thuộc tập $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Có bao nhiêu dãy số dễ nhớ như vậy?

Lời giải.

Cách 1. Chọn dãy $d \ldots 4d \ldots 5d \ldots 6d \ldots 7$ rồi chọn $d \ldots 1d \ldots 2d \ldots 3$ tương ứng sau đó. Xét 2 trường hợp sau

TH1 $d \ldots 4 = d \ldots 5 = d \ldots 6 = d \ldots 7 = a$. Có 10 cách chọn $a \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$

Mỗi cách chọn như vậy cho đúng một dãy $d \ldots 1d \ldots 2d \ldots 3$.Có 10 dãy số dễ nhớ trong trường hợp này

TH2 Tồn tại 2 trong 4 số $d \ldots 4, d \ldots 5, d \ldots 6, d \ldots 7$ khác nhau. Có $10000 - 10 = 9990$ dãy $d \ldots 4d \ldots 5d \ldots 6d \ldots 7$

Khi đó $d \ldots 4d \ldots 5d \ldots 6$ và $d \ldots 5d \ldots 6d \ldots 7$ là hai dãy khác nhau nên có 2 cách chọn $d \ldots 1d \ldots 2d \ldots 3$. Trường hợp này có $2.9990 = 19980$ dãy.

Vậy có $19980 + 10 = 19990$ dãy dễ nhớ.

Cách 2. Dựa trên hai trường hợp tạo ra dãy dễ nhớ, ta có lời giải sau

Gọi A là tập dãy dễ nhớ mà $d \ldots 1d \ldots 2d \ldots 3 = d \ldots 4d \ldots 5d \ldots 6$ và B là tập dãy dễ nhớ mà $d \ldots 1d \ldots 2d \ldots 3 = d \ldots 5d \ldots 6d \ldots 7$.

Khi đó, số dãy dễ nhớ là số phần tử của tập $A \cup B$.

Số phần tử của tập A là số cách chọn dãy $d \ldots 4d \ldots 5d \ldots 6d \ldots 7$ 10000 phần tử.

Số phần tử của tập B cũng là số cách chọn dãy $d \ldots 4d \ldots 5d \ldots 6d \ldots 7$ 10000 phần tử.

Số phần tử của tập $A \cap B$ là 10 (khi các chữ số được chọn bằng nhau hết). $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

Vậy có $20000 - 10 = 19900$ dãy dễ nhớ.

3 Thay cho lời kết

Hai quy tắc đếm và các cấu hình cơ bản được dùng phối hợp với nhau để giải quyết bài toán. Với bài toán đếm ta thường có 2 suy nghĩ là đếm trực tiếp hay sử dụng phần bù. Xem đếm trực tiếp hoặc đếm các đối tượng trong phần bù là một công việc, tìm cách chia nhỏ các công việc ra thành các phương án hay công đoạn. Mỗi phương án hay công đoạn là được xem là một công việc mới, quá trình suy nghĩ lại được tiếp tục và đưa đến một cách chọn đối tượng đơn giản hơn.

Tổ hợp là một chủ đề khó trong toán học. Qua kinh nghiệm của bản thân việc giảng dạy phép đếm cho học sinh quan trọng nhất ở việc hình thành các khái niệm ban đầu, sau đó là việc phân tích các ý tưởng để dẫn đến lời giải. Bài toán tổ hợp mang khá nhiều nội dung thực tế và liên môn, phong phú và đa dạng. Nếu khai thác hợp lý thì ta có thể giúp học sinh thêm yêu thích toán học. Giúp gắn kết được các nội dung khác nhau của toán và thấy được những ứng dụng của toán học trong đời sống.

Trên đây là một số kinh nghiệm giảng dạy chủ đề phép đếm có thể còn mang tính chủ quan của bản thân tác giả. Rất mong được sự đóng góp của thầy, cô giáo về chủ đề.

SỰ HỘI TỤ CỦA MỘT SỐ DÃY SỐ TRONG ĐỀ THI GIẢI TÍCH OLYMPIC TOÁN SINH VIÊN

Trần Huỳnh Mai
Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp

1 Các khái niệm cần thiết

1.1. Định nghĩa 1.1

Dãy số (thực) là một hàm số xác định trên tập con của tập số tự nhiên. Với $M \subset N$, thay cho kí hiệu

u: M $\rightarrow$ R

n $\mapsto$u(n)

ta thường dùng ký hiệu (u_n).

1.2. Định nghĩa 1.2.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy tăng nếu $u_n \leq u_{n+1},\ \forall n \in N$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy giảm nếu $u_n \geq u_{n+1},\ \forall n \in N$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy tăng nghiêm ngặt nếu $u_n < u_{n+1},\ \forall n \in N$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy giảm nghiêm ngặt nếu $u_n > u_{n+1},\ \forall n \in N$.

1. Nhận xét:
2. Nếu (u_n) tăng, (v_n) tăng thì $(u_n + v_n)$ tăng.
3. Nếu (u_n) giảm, (v_n) giảm thì $(u_n + v_n)$ giảm.
4. Nếu (u_n) tăng thì $(-u_n)$ giảm. Và nếu (u_n) giảm thì $(-u_n)$ tăng.
5. Nếu 2 dãy (u_n), (v_n) tăng (giảm) thì $(u_n v_n)$ tăng (giảm).
6. Một dãy có thể không tăng cũng không giảm. Ví dụ $u_n = (-1)^n,\ n \in N$.

1.3. Định nghĩa 1.3.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy bị chặn trên nếu tồn tại hằng số M sao cho $u_n \leq M,\ \forall n$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy bị chặn dưới nếu tồn tại hằng số m sao cho $u_n \geq m,\ \forall n$.

Dãy số (u_n) được gọi là dãy bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới.

1.4. Định lí 1.1. Dãy số (u_n) bị chặn khi và chỉ khi tồn tại hằng số c$\geq$0 sao cho $|u_n| \leq c,\ \forall n$

1.5. Định nghĩa 1.4. Dãy số (u_n) gọi là hội tụ về a, kí hiệu $\lim u_n = a$, nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tùy ý, tồn tại số N sao cho với mọi n > N đều có $|u_n - a| < \varepsilon$.

$$\lim u_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\ N : \forall n > N,\ |u_n - a| < \varepsilon.$$

1.6. Định lí 1.2. (Tính duy nhất của giới hạn) Giới hạn của một dãy hội tụ là duy nhất.

1.7. Định lí 1.3. (Định lí giới hạn kẹp giữa). Cho ba dãy số (x_n), (y_n), (z_n) thỏa mãn

i/ $\exists n_0 \in N : \forall n \geq n_0,\ z_n \leq x_n \leq y_n$

ii/ Các dãy (y_n), (z_n) cùng hội tụ đến a.

Khi đó, dãy (x_n) hội tụ và limx_n= a.

1.8. Định lí 1.4. (Tính chất đại số của dãy hội tụ). Cho hai dãy hội tụ (x_n), (y_n) và limx_n = a; limy_n= b. Khi đó,

i/ Dãy (-x_n) hội tụ và lim(-x_n) = -a.

ii/ Dãy ($|x_n|$) hội tụ và lim$|x_n|$ = $|a|$

iii/ Dãy $(x_n + y_n)$ hội tụ và lim$(x_n + y_n)$ = a + b.

iv/ Dãy (kx_n) hội tụ và lim(kx_n) = ka.

v/ Dãy ($x_n y_n$) hội tụ và lim($x_n y_n$) = ab.

vi/ Với b $\neq$ 0 thì dãy ($\frac{1}{y_n}$) được xác định từ 1 chỉ số nào đó, hội tụ và lim$\frac{1}{y_n}$ = $\frac{1}{b}$.

vii/ Với b $\neq$ 0 thì dãy ($\frac{x_n}{y_n}$) được xác định từ 1 chỉ số nào đó, hội tụ và lim$\frac{x_n}{y_n}$ = $\frac{a}{b}$.

1.9. Định lí 1.5. Mọi dãy hội tụ đều bị chặn.

1.10. Định lí 1.6. (Định lý Stolz). Cho 2 dãy số (x_n), (y_n) đồng thời thỏa mãn các điều kiện

a) $y_{n+1} > y_n$ với mọi n$\in N^*$

b) $\lim y_n = +\infty$

c) tồn tại $\lim \left(\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}\right) = A$

Khi đó, tồn tại $\lim \frac{x_n}{y_n} = A.$

1.11. Định lí 1.7. (Định lý trung bình Cesaro)

Nếu $\lim x_n = a$ thì $\lim \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = a.$

Định lý này có thể phát biểu dưới dạng tương đương như sau:

Nếu $\lim(x_{n+1} - x_n) = a$ thì $\lim \frac{x_n}{n} = a.$

2 Một bài toán áp dụng

Có nhiều phương pháp để xét sự hội tụ của một dãy số, mỗi phương pháp đều có những điểm mạnh, đặc trưng riêng cho riêng mình như sử dụng định nghĩa và tiêu chuẩn Cauchy, xác định số hạng tổng quát rồi tìm giới hạn, sử dụng tính đơn điệu và bị chặn, so sánh dãy số,...

1. (Olympic Toán sinh viên 2022)

a/ Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > 3/2$.

b/ Chứng minh dãy số (u_n) hội tụ.

Giải

a/ Từ định nghĩa $u_{n+1} = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} > \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = u_n, \forall n \geq 1$. Suy ra $u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1$.

Vậy (u_n) là dãy tăng.

Hơn nữa, do $u_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ nên từ tính đơn điệu của (u_n) ta suy ra $u_n > 3/2 \Leftrightarrow n \geq 3$

b/ Sử dụng đánh giá $n! > n(n-1)$ để thấy $u_n = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} < 2, \forall n \geq 2$.

Vậy (u_n) bị chặn trên.

Sử dụng kết quả câu a/ dãy (u_n) tăng và bị chặn trên nên hội tụ.

2. (Olympic Toán sinh viên 2017) Cho dãy số (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1 = 2019 \\ x_{n+1} = \ln(1 + x_n) - \frac{2x_n}{1+x_n}, \forall n \in N^* \end{cases}$

a/ Chứng minh rằng (x_n) là dãy số không âm.

b/ Chứng minh rằng tồn tại số thực c∈(0;1) sao cho $|x_{n+1} - x_n| \leq c\,|x_n - x_{n-1}|\ \ \forall n \geq 2$.

c/ Chứng minh rằng (x_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Giải

a/ Đặt $f(x) = \ln(1+x) - \frac{2x}{2+x}$

Ta có: $f'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} \geq 0, \forall x \geq 0$.

Vậy f đơn điệu không giảm trên [0;+∞). Do đó, $f(x) \geq f(0) = 0\ \forall x \geq 0$.

Mà $x_1 \geq 0$ nên (bằng quy nạp) $x_{n+1} = f(x_n)$ xác định và không âm với mọi n≥ 1.

b/ Ta có: $(1+x)(2+x)^2 > x.4x = 4x^2$ nên $f'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} < \frac{1}{4},\ \forall x \geq 0$.

Vì thế, áp dụng định lý giá trị trung bình của Lagrange, ta có:

$|f(b) - f(a)| = |f'(c)|\,|b-a| \leq \frac{1}{4}|b-a|$ (1) với mọi a, b∈ $[0;+\infty)$ (c ở giữa và phụ thuộc vào a và b).

Từ (1) suy ra $|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq \frac{1}{4}|x_n - x_{n-1}|\ \forall n \geq 2$(điều phải chứng minh).

c/

Cách 1: Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp theo $n \geq 1$ rằng $|x_n| \leq \frac{2019}{4^{n-1}}$ (1)

(1) đúng khi n = 1.

Giả sử $n \geq 2$ và (1) đúng đến n – 1. Khi đó, theo (1) và giả thiết quy nạp,

$$|x_n - 0| = |f(x_{n-1}) - f(0)| \leq \frac{1}{4}|x_{n-1} - 0| \leq \frac{2019}{4^{n-1}};$$

Vậy (2) đúng với mọi n≥ 1.

Từ (2) ta có $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = 0$.

Cách 2:

Từ b/ ta thấy $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{4}|x_n - x_{n-1}| \leq ... \leq \frac{1}{4^{n-1}}|x_2 - x_1|$.

Vì thế, với mọi n, p$\in N^*$ ta có:

$\left|x_{n+p} - x_n\right| \leq \sum_{k=1}^{p}|x_{n+k} - x_{n+k-1}| \leq \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{4^{n+k-2}}|x_2 - x_1| = \frac{1}{4^{n-1}}|x_2 - x_1| . \sum_{k=1}^{p}\frac{1}{4^{k-1}} \leq \frac{1}{4^{n-1}}|x_2 - x_1| \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \to 0, n \to +\infty$. Vậy (x_n) là 1 dãy Cauchy nên nó hội tụ.

Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \alpha \geq 0$. Chuyển công thức truy hồi qua giới hạn ta được

$\alpha = \ln(1+\alpha) - \frac{2\alpha}{2+\alpha} \Leftrightarrow g(\alpha) = 0;$ (3) trong đó $g(\alpha) = x - \ln(1+x) + \frac{2x}{1+x} = x - f(x)$ với mọi $x \geq 0$.

Dễ thấy $\alpha = 0$ thỏa (3). Mặt khác,

$$g'(x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} > 0\ \forall x \geq 0.$$

Từ đó, g tăng ngặt trên $[0; +\infty)$. Vậy $\alpha = 0$là nghiệm (không âm) duy nhất của (3); suy ra $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 0$.

3. (Olympic Toán sinh viên) Cho dãy số (u_n) là dãy số xác định bởi $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\ \forall n \geq 1$.

a/ Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $u_n > \frac{3}{2}$.

b/ Chứng minh dãy số (u_n)hội tụ.

c/ Chứng minh rằng giới hạn của dãy số (u_n) là 1 số vô tỉ.

Giải

a/ Khẳng định (u_n) đơn điệu tăng.

Từ định nghĩa

$u_{n+1} = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} > \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} = u_n$ với mọi $n \geq 1$.

b/ Chứng minh dãy số (u_n) hội tụ.

i/ Khẳng định (u_n) bị chặn trên.

Sử dụng đánh giá $n! \geq n(n-1)$ ta có

$u_n = \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \leq 1 + \frac{1}{1.2} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} < 2$ với mọi n≥2.

ii/ Dãy số (u_n) đơn điệu tăng và bị chặn trên nên hội tụ.

c/ Chứng minh rằng giới hạn của dãy số (u_n) là 1 số vô tỉ.

Phản chứng, giả sử giới hạn của dãy là hữu tỉ, tức là

$\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + ... = \frac{m}{n}$ với m, n nguyên tố cùng nhau.

Nhân 2 vế với $n!$ ta đi đến

$$n!\left(\frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... = (n-1)!m.$$

Vậy $S \in N^*$. Từ đây suy ra $nS \geq 1$, tức là (n+1)S - 1≥S, tức là

$$\frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + ... \geq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ...$$

Đây là điều vô lý.

Tài liệu

[1] Tuyển tập và kỷ yếu thi Olympic Toán sinh viên từ năm 1993 đến 2022.

MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TRƯỜNG HỮU HẠN TRONG CÁC BÀI TOÁN ĐỒNG DƯ

Dương Thái Bảo

Trường THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp

Tóm tắt nội dung

Trong báo cáo này chúng ta sẽ chỉ ra một số ứng dụng của trường hữu hạn $\mathbb{Z}_p, \mathbb{F}_{p^2}$ khi giải các bài toán đồng dư.

1 Kiến thức nền tảng

Từ việc định nghĩa modulo theo số nguyên n (khác 0) đã tạo ra hai phép toán có tính chất (giao hoán, kết hợp,...) tương tự như phép cộng và nhân của hai số thực

$$\begin{gathered} a \pm b \equiv c \pm d \pmod{n} \\ ab \equiv cd \pmod{n} \end{gathered}$$

trong đó $a \equiv b \pmod{n}$ và $c \equiv d \pmod{n}$. Do đó nếu bỏ qua kí hiệu mod n thì gần như chúng ta thấy hai phép toán này thực hiện giống như thực hiện trên tập số thực. Có chăng sự khác biệt là sự tồn tại của phép chia (nhân với nghịch đảo). Điều này phụ thuộc vào tính nguyên tố với n. Đặt $\overline{a}$ là tập các số cùng đồng dư với a theo modulo n, lúc này $\overline{a}$ được gọi là một lớp *lớp thặng dư*, $\mathbb{Z}_n$ là tập hợp tất cả các lớp $\overline{a}$. Tập $\mathbb{Z}_n$ cùng với hai phép toán ở trên tạo thành một **vành**, đặc biệt khi $n = p$ thì

$$\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}^1.$$

trở thành **trường**. Hơn nữa, nếu a không là thặng dư chính phương modulo p thì

$$\mathbb{F}_{p^2} = \{x + y\sqrt{p} \colon x, y \in \mathbb{Z}_p\}$$

cũng là một trường hữu hạn.

[1]Ở một số tài liệu vẫn kí hiệu $\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$

2 Một số ví dụ minh họa

Ví dụ 2.1 (VMO 2011)**.** Cho dãy số $\{a_n\}$ thỏa mãn

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = -1 \\ a_n = 6a_{n-1} + 5a_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$

Chứng minh rằng $a_{2011} - 2010 \vdots 2011$.

Giải. Bây giờ ta sẽ xét dãy $\{a_n\}$ trên trường $\mathbb{Z}_p$ với $p = 2011$. Ấy thế, để cho người đọc dễ dàng tiếp cận, chúng ta sẽ viết dưới dạng đồng dư.

Xét phương trình đồng dư $X^2 - 6X - 5 \equiv 0 \pmod p$, khi đó $(X-3)^2 \equiv 14 \pmod p$. Ta dễ dàng kiểm tra được 14 là thặng dư bậc hai modulo p (dùng tính chất của kí hiệu Legendre). Tức là tồn tại $a \in \{1, \ldots, \frac{p-1}{2}\}$ sao cho $a^2 \equiv 14 \pmod p$. Lúc này phương trình đang xét có hai nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} X \equiv 3 + a \pmod p \\ X \equiv 3 + a \pmod p \end{array}\right. .$$

Tiếp theo ta xét dãy $\{X_n\}$ thỏa $X_n = c_1(3+a)^n + c_2(3-a)^n$ với mọi $n \geqslant 0$, trong đó c_1, c_2 là hai số nguyên ta sẽ chọn để

$$\begin{cases} X_0 \equiv 1 \pmod p \\ X_1 \equiv -1 \pmod p \end{cases} .$$

Giải hệ này ta được

$$\begin{cases} c_1 \equiv \frac{a-4}{2a} \pmod p \\ c_2 \equiv \frac{a+4}{2a} \pmod p \end{cases}$$

Bằng qui nạp ta dễ dàng chứng minh được rằng

$$X_{n+2} \equiv 6X_{n+1} + 5X_n \pmod p \quad \text{và} \quad a_n \equiv X_n \pmod p, \quad \forall n \geqslant 0.$$

Tuy nhiên, ta có

$$\begin{aligned} X_p &= c_1(3+a)^p + c_2(3-a)^p \\ &\equiv c_1(3+a) + c_2(s-a) \pmod p \\ &\equiv \frac{(a-4)(3+a)}{2a} + \frac{(a+4)(3-a)}{2d} \pmod p \\ &\equiv -1 \pmod p. \end{aligned}$$

Vậy $a_p - (p-1)$ chia hết cho p. □

Ví dụ 2.2 (IMO SL 2003)**.** Cho dãy số $a_0, a_1, a_2, \ldots$ được định nghĩa như sau

$$a_0 = 2, \qquad a_{k+1} = 2a_k^2 - 1 \quad \text{với mọi } k \geq 0.$$

Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố lẻ của a_n thì 2^{n+3} là ước của $p^2 - 1$.

Giải. Xét phương trình $a + \dfrac{1}{a} = 4$, khi đó ta chọn $a = 2 + \sqrt{3}$ kéo theo $\frac{1}{a} = 2 - \sqrt{3}$. Chú ý rằng

$$a_0 = \frac{a + \frac{1}{a}}{2}$$

suy ra

$$a_1 = 2a_0^2 - 1 = \frac{a^2 + \frac{1}{a^2}}{2}.$$

Tiếp tục ta thu được

$$a_n = \frac{a^{2^n} + \frac{1}{a^{2^n}}}{2} = \frac{(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n}}{2}, \quad \forall n \geqslant 0.$$

Bây giờ xét ước nguyên tố lẻ p của x_n. Vì $p \mid a_p = 2a_{p-1}^2 - 1$ nên

$$2a_{p-1}^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

kéo theo 2 là thặng dư chính phương modulo p. Thế nên $p \equiv \pm 1 \pmod{8}$ hay $8 \mid p^2 - 1$.

Nếu 3 là thặng dư chính phương modulo p thì ta sẽ xét dãy $\{a_n\}$ trên trường $\mathbb{Z}_p$. Mặt khác tồn tại $x \in \mathbb{Z}_p$ sao cho $x^2 = 3$. Khi đó

$$a_n = \frac{(2+x)^{2^n} + (2-x)^{2^n}}{2} = 0$$

vì $2 - x = \frac{1}{2-x}$ nên suy ra

$$(2+x)^{2^{n+1}} = -1$$

mà 2 là thặng dư chính phương nên tồn tại $y \in \mathbb{Z}_p$ sao cho $y^2 = 2$, suy ra

$$2 + x = \frac{4+2x}{2} = \frac{(x+1)^2}{2} = \left(\frac{1+x}{y}\right)^2.$$

Đặt $z = \dfrac{1+x}{y}$, ta có

$$z^{2^{n+2}} = -1 \quad \text{và} \quad z^{2^{n+3}} = 1.$$

Lúc này $\operatorname{ord}(z) = 2^i$ với $i \leqslant n+3$. Nếu $i \leqslant n+2$ thì ta bình phương hai vế $z^i = 1$ cho đến khi nào bằng với $n+2$ ta sẽ gặp ngay mâu thuẫn. Vì thế $\operatorname{ord}(z) = 2^{n+3}$. Vậy $2^{n+3} \mid p - 1$, suy ra điều phải chứng minh.

Nếu 3 không là thặng dư chính phương thì ta sẽ xét dãy $\{a_n\}$ trên trường

$$\mathbb{F}_{p^2} = \{u + v\sqrt{3} | u, v \in \mathbb{Z}_p\}$$

Vì $a_n = 0$ nên

$$(2+\sqrt{3})^{2^n} + (2-\sqrt{3})^{2^n} = 0$$

mà $2-\sqrt{3} \neq 0$ trên $\mathbb{F}_{p^2}$ nên

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^{2^{n+1}} = -1.$$

Mặt khác, $2 = y^2 = (y + 0\sqrt{3})^2$ nên 2 cũng là số chính phương trong $\mathbb{F}_{p^2}$. Đặt $z = \frac{1+\sqrt{3}}{y}$, khi đó $z^{2^{n+2}} = -1$. Lập luận tương tự như trên ta cũng có $\text{ord}(z) = 2^{n+3}$. Vì thế $2^{n+3} \mid p^2 - 1$.

Vậy cả hai trường hợp ta đều có điều phải chứng minh. □

3 Bài tập đề nghị

Bài tập 3.1. Cho dãy số (a_n) thỏa mãn

$$\begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 4 \\ a_{n+1} = 2a_n + 3a_{n-1}, \quad \forall n \geqslant 1 \end{cases}.$$

Chứng minh rằng trong dãy số trên không có số nào là bội của 2017.

Bài tập 3.2 (China TST 2008)**.** Dãy số $\{x_n\}$ được định nghĩa $x_1 = 2, x_2 = 12$ và $x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n$, với mọi $n \geqslant 1$. Gọi p là số nguyên tố lẻ, q là ước nguyên tố của x_p. Chứng minh rằng nếu $q \neq 2, 3$ thì $q \geqslant 2p - 1$.

Bài tập 3.3 (Singapore National Matematical Olympiad 2019)**.** Cho $p \equiv 2 \pmod 3$ là số nguyên tố, k là một số nguyên dương và đa thức

$$P(x) = 3x^{\frac{2p-1}{3}} + 3x^{\frac{p+1}{3}} + x + 1.$$

Đặt $S = \{0, 1, \cdots, p-1\}$, với mỗi số nguyên n, ta kí hiệu $R(n)$ là số dư của n khi chia cho p. Tại mỗi bước ta chỉ có thể thực hiện một trong hai biến đổi sau

i) thay mọi phần tử i thuộc S bởi $R(P(i))$, ii) thay mọi phần tử i thuộc S bởi $R(i^k)$.

Xác định số nguyên dương k sao cho tồn tại hữu hạn bước biến đổi S về $\{0\}$.

Bài tập 3.4 (China TST 2006)**.** Tìm tất cả các cặp số nguyên dương (a, n) sao cho $\frac{(a+1)^n - a^n}{n}$ là một một số nguyên.

Bài tập 3.5 (Korea National Olympiad 2019). Cho p là số nguyên tố dạng $7k+1$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m sao cho m^3+m^2-2m-1 là bội của p.

Bài tập 3.6. Cho p là số nguyên tố dạng $7k-1$. Chứng minh rằng tồn tại số nguyên dương m sao cho m^3+m^2-2m-1 là bội của p.

Bài tập 3.7 (China MO 2006). Cho các số nguyên dương k, m, n thỏa $mn = k^2+k+3$. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất một trong hai phương trình $x^2+11y^2 = 4m$ và $x^2+11y^2 = 4n$ có nghiệm lẻ.

Bài tập 3.8 (Iran Mo round 3 2005). Cho k là một số nguyên và $p \equiv 3 \pmod 4$ là một số nguyên tố, chúng ta định nghĩa dãy $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ như sau

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_n = 2ka_{n-1} - (k^2+1)a_{n-2} \quad (n \geqslant 2).$$

Chứng minh rằng

a) $a_{n+p^2-1} \equiv a_n \pmod p$.

b) $a_{n+p^3-p} \equiv a_n \pmod{p^2}$.

Bài tập 3.9 (Iran MO round 3 2014). Chúng ta gọi hai bộ số nguyên $A = (a_1, \ldots, a_n)$ và $B = (b_1, \ldots, b_n)$ là **trao đổi** nếu $503 \mid a_i - b_i$ với mọi $1 \le i \le n$, khi đó ta kí hiệu $A \sim B$. Bên cạnh đó với mọi số nguyên dương r ta đặt $A^r = (a_1^r, a_2^r, \ldots, a_n^r)$. Chứng minh rằng tồn tại các số nguyên dương k, m sao cho - $k \geqslant 250$,

- tồn tại các hoán vị khác nhau $\pi_1, \ldots, \pi_k$ của $(1, \ldots, 502)$ sao cho với mọi $i \leqslant k-1$ thì $\pi_i^m \sim \pi_{i+1}$.

Bài tập 3.10 (VMO 2020). Cho dãy số (a_n) xác định bởi $a_1 = 5, a_2 = 13$ và

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n \text{ với mọi } n \ge 2$$

Chứng minh rằng nếu p là ước nguyên tố của a_{2^k} thì $p-1$ chia hết cho 2^{k+1} với mọi số tự nhiên k.

Bài tập 3.11. Cho k là số nguyên dương và dãy số $\{x_n\}$ thỏa

$$\begin{cases} x_0 = 1, x_1 = 3 \\ x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n, \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases}.$$

Gọi p là ước nguyên tố lẻ của x_{2^k}. Chứng minh rằng 2 là thặng dư chính phương mod p và 2^{k+3} là ước của $p-1$.

Tài liệu

[1] Z. X. Wan, *Lectures on Finite Fields and Galois Rings*, 2003.

[2] D. T. Bảo, *Bài giảng số học dành cho học sinh và giáo viên chuyên toán*, NXB ĐHQG Hà Nội, 2023.

[3] https://artofproblemsolving.com/community

ÁP DỤNG TÍNH CHẤT SỐ HỌC KHẢO SÁT DÃY SỐ

Nguyễn Đình Thức
Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn, Bình Định

Tóm tắt nội dung

Chúng tôi giới thiệu một số áp dụng số học trong khảo sát dãy số.

Chủ đề Sử dụng phương pháp Số học để khảo sát tính chất Dãy số, là chủ đề hay; thường xuất hiện trong đề thi học sinh giỏi Quốc gia và Quốc tế. Sáng kiến nhằm trình bày việc sử dụng phương pháp Số học khi xét các loại Dãy số phức tạp hiện nay.

1 Dãy số nguyên sinh bởi đa thức

Với 2 số nguyên $a;b$ ($b \neq 0$); khi chia a cho b ta có $a = bq + r$. Thuật toán Euclid xác định gcd $(a;b) = gcd(r;b)$. (trong đó gcd(a;b) là ước chung lớn nhất của 2 số nguyên a; b). Phát triển thuật toán trên ta có thuật toán " kiểu Ơ-clic" dùng để xác định ước số chung của các số hạng trong các dãy số nguyên (u_n) có dạng hàm đa thức và hàm số mũ.

Ta lần lượt sử dụng kỹ thuật này trong các bài toán sau đây.

Bài toán 1. Cho dãy số $(u_n)\, u_n = n^2 + 1;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm tất cả các số nguyên dương d là ước số chung của hai số hạng liên tiếp u_n và u_{n+1} ; với n là một số nguyên dương tùy ý.

Lời giải. Gọi d là ước số chung của u_n và u_{n+1} Do $(n+1)^2 + 1 = (n^2+1) + 2n + 1$, suy ra gcd (u_n ; u_{n+1})=gcd(u_n ;2n+1) Khi đó d là ước số của 2n+1 (*) , suy ra d là ước số của (2n+1)2 Do $(2n+1)^2 = 4(n^2+1) + 4n - 3$, suy ra d là ước số của 4n-3 (**) Từ (*) và (**) , suy ra d là ước số của 5 (do $4n - 3 = 2(2n+1) - 5$) Thử lại khi cho n=2 thì d=1; d=5 đều thỏa mãn

Bài toán 2. Cho dãy số $(u_n)\, u_n = n^3 + a;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Có hay không một số nguyên a mà tồn tại hai số hạng liên tiếp u_n và u_{n+1} có ước số chung là 3.

Lời giải. Gọi d là ước số chung của u_n và u_{n+1} Do $(n+1)^3 + a = (n^3+a) + 3n^2 + 3n + 1$, suy ra gcd (u_n ; u_{n+1})=gcd(u_n ; $3n^2 + 3n + 1$) Khi đó d là ước số của 3n2+3n+1 (*) , suy ra d là ước số của 3n3+3n2+n Do $3n^3 + 3n^2 + n = 3(n^3+a) + 3n^2 + n - 3a$, suy ra d là ước số của $3n^2 + n - 3a$ (**) Từ (*) và (**) , suy ra d là ước số của 2n+3a-1 (***) Khi d là ước số của 3n2+3n+1 (*) , suy ra d là ước số của 6n2+6n+2 Do $6n^2 + 6n + 2 = 2(3n^2 + n - 3a) + 4n + 6a + 2$, suy ra d là ước số của $4n + 6a + 2$ (****) Từ (***) và (****) , suy ra d là ước số của 4 Cho d=3 thì 3 là ước số của 4, vô lý. Vậy không tồn tại số nguyên a để hai số hạng liên tiếp u_n và u_{n+1} có ước số chung là 3

Bài toán 3 (Olympic Iran-năm 2017-2018)**.** Cho trước số nguyên tố p lẻ. Tồn tại hay không một dãy số (u_n) gồm các số nguyên dương mà p không là ước số chung của cả hai số $u_n + m$ và $u_m + n$ với mọi số nguyên dương m<n.

Lời giải. Chọn $u_n = pn - n + 1$ thì $\begin{cases} u_n + m = pn - n + m + 1 \\ u_m + n = pm - m + n + 1 \end{cases}$ Giả sử ngược lại p là ước số chung của $u_n + m$ và $u_m + n$ nên p là ước số của 2(n-m) Theo giả thiết p lẻ nên p là ước số của n-m Do p là ước số của $u_n + m = pn - n + m + 1$ suy ra p=1; vô lý Vậy chọn (u_n) $u_n = pn - n + 1$ thì p không là ước số chung của hai số $u_n + m$ và $u_m + n$ Nhận xét Giả sử tồn tại hai số nguyên dương m<n để p là ước số chung của $u_n + m$ và $u_m + n$. Khi đó p là ước số của $u_n - u_m + m - n$. Suy ra $u_n - u_m$ =(m-n)(pk-1). Từ đây ta có cách xây dựng dãy số trên

Bài toán 4. Cho dãy số (u_n) $u_n = 4n^2 + 1;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng với các số nguyên dương n có ước số nguyên tố p là 2 hoặc có dạng 4k+3 thì un sẽ không chia hết cho n.

Lời giải. Do n có ước số nguyên tố p nên ta chỉ cần chứng minh un không chia hết cho p Trường hợp p=2 thì un không chia hết cho p Trường hợp p=4k+3, suy ra gcd $(2n; p)$ =1. Theo định lý Fer-mat ta có $(2n)^{p-1} \equiv 1(\bmod p\ )$. Suy ra $(2n)^{4k+2} \equiv 1(\bmod p\ )$ (*) . Giả sử ngược lại un chia hết cho n, khi đó $(2n)^2 \equiv -1(\bmod p\ )$ (**) Từ (*) và (**) , suy ra $(-1)^{2k+1} \equiv 1(\bmod p\ )$. Suy ra p=2, vô lý. Vậy un sẽ không chia hết cho n. Nhận xét nếu một số p nguyên tố thì p=2 hoặc p=4k+1 hoặc p=4k+3. Vậy số nguyên tố p có dạng p=4k+1 thì có thể un chia hết cho n

Bài toán 5. Cho dãy số (u_n) $u_n = 2^n - 1; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng với 2 số nguyên dương m;n nguyên tố cùng nhau thì hai số hạng u_n và u_m cũng nguyên tố cùng nhau

Lời giải. Ta thấy $u_n = 2^n - 1; \quad u_m = 2^m - 1$. Gọi d là ước số chung lớn nhất của u_n và u_m . Không mất tính tổng quát ta giả sử n$\geq$ m. Khi chia n cho m ta có n=mq1+ r1 ; 0$\leq$ r1<m Do $2^n - 1 = (2^m)^{q_1}.2^{r_1} - 1 = \left[(2^m)^{q_1} - 1\right].2^{r_1} + 2^{r_1} - 1$.Ta có suy ra gcd ($u_n$; u_m)=gcd($u_m; u_{r_1}$) Tiếp tục chia m cho r1 ta có m= r1q2+ r2 ; 0$\leq$ r2< r1. Ta có gcd($u_m; u_{r_1}$)=gcd (u_{r_1} ; u_{r_2}). Quá trình trên được thực hiện đến khi rk$\neq$0; rk+1=0 suy ra rk=gcd (n;m)=1 Khi đó d là ước số của u_{r_k} . Suy ra d là ước số của $u_1 = 1$ nên d=1 Vậy hai số hạng u_n và u_m nguyên tố cùng nhau

Bài toán 6. Cho dãy số (u_n) $u_n = 2^n - 1; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta đều có số hạng u_n không chia hết cho n.

Lời giải. Ta chỉ cần chứng minh u_n không chia hết cho một ước nguyên tố nào đó của n.

Gọi p là ước số nguyên tố bé nhất của n;

Nếu p=2, $\forall n \in \mathbb{N}^*; u_n = 2^n - 1$ không chia hết cho 2.

Nếu p>2, p là ước số nguyên tố bé nhất của n nên n không chia hết cho p-1.

Vì vậy ta có gcd(n;p-1)=1.Theo thuật toán Ơ-clic, tồn tại x;y nguyên để 1=nx+(p-1)y.

Suy ra $2^1 = (2^n)^x.(2^{p-1})^y$(*) . Trong đó theo định lý Fer-mat có $2^{p-1} \equiv 1 \ (\bmod p)$.

Giả sử ngược lại u_n chia hết cho p thì $2^n \equiv 1 \ (\bmod p)$.Từ (*) suy ra $2 \equiv 1 \ (\bmod p)$, Vô lý.

Vậy mọi số hạng u_n đều không chia hết cho n.

Nhận xét. Bài toán này sử dụng hai kết quả sau đây

- Số nguyên a chia hết cho b thì a chia hết cho mọi ước số nguyên tố của b.
- Nếu hai số a;b nguyên tố cùng nhau thì luôn có cặp số nguyên x;y mà ax+by=1.

Bài toán 7. Cho dãy số $(u_n)\, u_n = 2^{2^n} + 1; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng với 2 số nguyên dương m;n phân biệt thì ta có hai số hạng u_n và u_m nguyên tố cùng nhau.

Lời giải. Ta có

$u_n = 2^{2^n} + 1; \forall n \in \mathbb{N}^*; 2^{2^n} - 1 = 2^{2.2^{n-1}} - 1 = \left(2^{2^{n-1}} + 1\right)\left(2^{2^{n-1}} - 1\right)$, suy ra $u_n - 2 = u_{n-1}(u_{n-1} - 2) = \ldots. = u_{n-1}.u_{n-2}\ldots\ldots u_1(u_1 - 2) = 3u_{n-1}.u_{n-2}\ldots\ldots u_1\,(*)$ Không mất tính tổng quát ta giả sử n> m. Khi đó m=n-i, suy ra $u_m = u_{n-i}$ Gọi d là ước số chung lớn nhất của u_n và u_m . Do $(*)$nên d là ước số của 2 Mà u_n và u_m là các số lẻ nên d=1. Vậy hai số hạng u_n và u_m nguyên tố cùng nhau

Bài toán 8. Cho dãy số $(u_n)\, u_n = 2^n - 1; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng với hai số nguyên dương m;n ta có $u_n \equiv 0(\bmod u_m^2)(*) \Leftrightarrow n \equiv 0(\bmod m u_m)(**)$

Lời giải. Ta thấy $(*) \Leftrightarrow \dfrac{2^n - 1}{2^m - 1} \equiv 0(\text{mod } 2^m - 1)$; $(**) \Leftrightarrow \dfrac{n}{m} \equiv 0(\text{mod } 2^m - 1)$ +Xét chiều đảo. Ta có n=mk(2m-1) Khi đó $2^n - 1 = 2^{mk(2^m-1)} - 1 = (2^m - 1)(2^{m(k.2^m-k-1)} + 2^{m(k.2^m-k-2)} + \ldots\ldots\ldots. + 2^m + 1)$, suy ra $\dfrac{2^n-1}{2^m-1} = (2^{m(k.2^m-k-1)} + 2^{m(k.2^m-k-2)} + \ldots\ldots\ldots + 2^m + 1)$ Do $2^m \equiv 1(\text{mod } 2^m - 1)$; $2^{m.2} \equiv 1(\text{mod } 2^m - 1)$; $\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots$; $2^{m(k.2^m-k-2)} \equiv 1(\text{mod } 2^m - 1)$; $2^{m(k.2^m-k-1)} \equiv 1(\text{mod } 2^m - 1)$, suy ra $\dfrac{2^n-1}{2^m-1} \equiv k.2^m - k \equiv 0(\text{mod } 2^m - 1)$ +Xét chiều thuận. Ta cần chứng minh 2 bước Bước 1 chứng minh n chia hết m Thật vậy nếu n=mk+d với 0<d<m . Khi đó $2^n - 1 = 2^{mk}.2^d - 1 = 2^d(2^{mk} - 1) + 2^d - 1$ (a) Theo giả thiết suy ra $2^n - 1$chia hết cho $2^m - 1$ (b) Từ (a) và (b) suy ra $2^d - 1$chia hết cho $2^m - 1$ vô lý vì 0<d<m Vậy d=0 và n=mk Bước 2 chứng minh $\dfrac{n}{m}$ chia hết $2^m - 1$ Thật vậy theo giả thiết $\dfrac{2^n-1}{2^m-1} = \dfrac{2^{mk}-1}{2^m-1} = 2^{m(k-1)} + 2^{m(k-2)} + \ldots\ldots\ldots + 2^m + 1 \equiv 0(\text{mod } 2^m - 1)$, suy ra $k \equiv 0(\text{mod } 2^m - 1)$ (c). Do n=mk , suy ra $k = \dfrac{n}{m}$ (d). Từ (c) và (d), suy ra $\dfrac{n}{m}$ chia hết $2^m - 1$

Xác định số hạng chính phương; lập phương đúng ta có thể dùng cách so sánh với các số chính phương, lập phương liên tiếp… hoặc tính chất chia hết $a^2 \equiv 0; 1\,(\text{mod}3)$; $a^2 \equiv 0; 1\ (\text{mod}4)$; $a^2 \equiv 0; 1; 4\,(\text{mod}5)\ldots$ Phương pháp này có thể giải và sáng tác các bài toán dãy số (u_n) dạng $u_n = P(n)$; $u_n = a^{P(n)}; \forall n \in \mathbb{N}^*$; với P(n) là đa thức có hệ số nguyên.

Bài toán 9 (Olympic Tây Ban Nha- năm 2017-2018)**.** Cho dãy số $(u_n)\, u_n = n; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm các giá trị n sao cho số hạng thứ 2n+1 là số chính phương và các số hạng có thứ tự từ 2n+2 đến 3n +2 đều là số không chính phương.

Lời giải. Giả sử số hạng thứ 2n+1 là số chính phương $2n + 1 = a^2; a \in \mathbb{Z}$ (*) Các số hạng có thứ tự từ 2n+2 đến 3n +2 đều là số không chính phương , suy ra $3n + 2 < (a+1)^2$ (**) Từ (*) và (**) suy ra $3\dfrac{a^2-1}{2} + 2 < (a+1)^2 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} < a < 2 + \sqrt{5} \Rightarrow a = 1; 2; 3; 4$ Thế vào (*) ta có a=3 và n=4. Thử lại 9 là số chinh phương nhưng 10;11;…;14 đều không chính phương. Nhận xét ý tưởng bài toán này là các số nguyên nằm giữa hai số chính phương liên tiếp sẽ không chính phương. Cũng với ý tưởng này ta có thể sáng tác các bài toán tương tự sau đây.

Bài toán 10. Cho dãy số $(u_n)\, u_n = n^2 + 3n + 5; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n ta luôn có u_n là số không chính phương

Lời giải. Giả sử u_n là số chính phương thì $4u_n = (2n+3)^2 + 11$ cũng là số chính phương (*) Do $(2n+3)^2 < 4u_n < (2n+4)^2$ mà $(2n+3)^2; (2n+4)^2$ là 2 số chính phương liên tiếp , suy ra $4u_n$ là số không chính phương . Điều này trái với (*) Vậy u_n là số không chính phương

Bài toán 11. Cho dãy các số nguyên dương liên tiếp 1;2;3;.....Ta thiết lập dãy số mới bằng cách bỏ đi các số chính phương. Xác định số 2020 là số hạng thứ mấy của dãy số mới vừa lập? và số hạng thứ 2020 có giá trị bao nhiêu trong dãy mới lập này?

Lời giải.

+Ta có .$44^2 = 1936 < 2020 < 45^2 = 2025$.Vậy từ 1 đến 2020 ta có 44 số chính phương

Suy ra số 2020 là số hạng thứ 2020-44=1976

+ Xét dãy số mới sau số 2020 đến số chính phương đầu tiên $45^2 = 2025$ có 4 số không chính phương; sau $45^2 = 2025$ đến số chính phương tiếp theo $46^2 = 2116$ có 90 số không chính phương là 2026; 2027,. . . . ;2115 số 2024 là số hạng ở vị trí thứ 1976+4=1980, số 2026 là số hạng ở vị trí thứ 1981

Vậy số hạng ở vị trí thứ 2020 có giá trị là 2026+39=2065

Bài toán 12. (Olympic England-năm 2017-2018) Cho dãy số (u_n) $u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} n^3$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (*). Tồn tại hay không hai số hạng thứ m ; thứ 2m của dãy số trên mà hiệu là số chính phương

Lời giải. Giả sử tồn tại số hạng $u_m; u_{2m}$ của dãy trên mà hiệu là số chính phương $u_{2m} - u_m = \dfrac{(2m)^2(2m+1)^2}{4} - \dfrac{m^2(m+1)^2}{4} = \dfrac{m^2}{4}(5m+3)(3m+1)$ gcd(5m+3;3m+1)= gcd(2m+2;3m+1)= gcd(2m+2;m-1)= gcd(4;m-1) Vậy gcd(5m+3;3m+1)$\in$ $\{1;2;4\}$ Trường hợp gcd(5m+3;3m+1)$\in$ $\{1;4\}$; ta cần điều kiện$\begin{cases} 5m+3 = a^2 \\ 3m+1 = b^2 \end{cases}$; $a;b \in \mathbb{Z}$ Mà $a^2 \equiv 0;1;4 \pmod 5$ nên trường hợp này không xảy ra Trường hợp gcd(5m+3;3m+1)$\in$ $\{2\}$; ta cần điều kiện$\begin{cases} 5m+3 = 2a^2 \\ 3m+1 = 2b^2 \end{cases}$; $a;b \in \mathbb{Z}$

Mà $2b^2 \equiv 0;2 \pmod 3$ nên trường hợp này cũng không xảy ra

Vậy không tồn tại hai số hạng $u_m; u_{2m}$ của dãy số trên mà hiệu là số chính phương

Nhận xét Nếu hai số a;b có gcd (a;b)=d thì a và b chính phương khi

+ $\dfrac{a}{d}; \dfrac{b}{d}$ chính phương , nếu d chính phương

+ $\dfrac{a}{d}; \dfrac{b}{d}$ là tích của d với một số chính phương , nếu d không chính phương

Bài toán 13. (Olympic Putnam-năm 1917-1918) Cho dãy số (u_n) $u_n = n^3 + an^2 + bn + c$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$ (*). Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương a;b;c luôn tìm số nguyên dương n sao cho u_n là số không chính phương

Lời giải. u_n là số chính phương thì $u_n \equiv 0;1 \pmod 4$

Suy ra nếu u_n và u_m là số chính phương thì $u_m - u_n \equiv 0;1;3 \pmod 4$ (1)

Giả sử ngược lại tồn tại số nguyên dương a;b;c mà mọi số nguyên dương n ta có u_n là số chính phương. Xét $u_2 - u_4 \equiv 2b \pmod 4$; $\quad u_3 - u_1 \equiv 2b + 2 \pmod 4$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $2b \equiv 0 (\bmod 4)$; $\quad 2b + 2 \equiv 0 (\bmod 4)$. Vậy 2 chia hết cho 4 (vô lý)

Bài toán 14. (Olympic Bungari-năm 2001) Cho dãy các khối lập phương với độ dài các cạnh là các số nguyên dương liên tiếp 1;2;3;.....Tồn tại hay không 3 khối lập phương của dãy trên mà tổng thể tich bằng 2020 đơn vi đo.

Lời giải. Giả sử tồn tại 3 khối lập phương cạnh a;b;c mà tổng thể tích bằng 2020 đơn vi đo Tổng thể tích 3 khối lập phương này là $a^3 + b^3 + c^3$. Ta có $a^3 \equiv 0; 1\ ; -1(\text{mod} 9)$ Khi chia $a^3 + b^3 + c^3$cho 9 thì số dư có thể là 0;1;2;3;6;7;8 Khi chia 2020 cho 9 thì số dư là 4 Vậy không tồn tại 3 khối lập phương cạnh nguyên có tổng thể tích bằng 2020 (đv đo)

Bài toán 15. Cho dãy các số nguyên dương liên tiếp 1;2;3;.....

a/ Tồn tại hay không k số hạng liên tiếp của dãy số trên mà chúng đều là hợp số

b/ (IMO-năm 1989). Tồn tại hay không k số hạng liên tiếp của dãy số trên mà trong chúng không có số nào là số nguyên tố hoặc lũy thừa của một số nguyên tố.

Lời giải.

a/ Ta có $(k+1)!$ chia hết cho tất cả các số từ 2 đến k+1. Khi đó $(k+1)! + 2$ chia hết cho 2; $(k+1)! + 2$ chia hết cho 2;... $(k+1)! + k + 1$ chia hết cho k+1;

Vậy k số hạng liên tiếp của dãy số ta vừa chọn đều là hợp số

b/ Tương tự câu a ta có $((k+1)!)^2 + 2$; $((k+1)!)^2 + 3$;...;$((k+1)!)^2 + k + 1$ đều là hợp số

Giả sử có một số nào đó trong k số này là lũy thừa của một số nguyên tố p $((k+1)!)^2 + i = p^m$; i$\in \{2; 3; \ldots; k+1\}$. Do $((k+1)!)^2 + i\ \vdots\ i$ và $((k+1)!)^2 + i > i$, suy ra $i = p^r$ $(1 \le r < m)$ (*). Mặt khác $p^{r+1} | ((k+1)!)^2$ và $p^{r+1} | p^m$ suy ra $p^{r+1} | i$.

Điều này trái với (*). Vậy không có số nào trong k số vừa chọn là số nguyên tố hoặc lũy thừa của một số nguyên tố.

Bài tập áp dụng

Bài 1. Cho $(u_n)\, u_n = n^3 - n; \forall n \in \mathbb{N}^*$.Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ và n>9 bé nhất để $u_n \equiv 0\,(\text{mod } 5\,!)$

Bài 2. Cho $(u_n)\, u_n = 100^n; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm n lớn nhất để 2013 ! $\equiv 0\,(\text{mod}\, u_n)$

Bài 3. Cho $(u_n)\, u_n = n^3 + 4n^2 - 48; \forall n \in \mathbb{N}^*$.Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ bé nhất để $u_n \equiv 0\,(\text{mod}\,125)$

Bài 4. Cho $(u_n)\, u_n = 2n^2 - 11n + 15.; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm $n \in \mathbb{N}^*$ lớn nhất để50! $\equiv 0(\text{mod}\, u_n)$

Bài 5. Cho $(u_n)\, u_n = 3^n - 1.; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Tìm n bé nhất để $u_n \equiv 0\,(\text{mod}\, 2^{2002})$

Bài 6. Cho dãy số $(u_n)\, u_n = 2^{n-1} - 1; \forall n \in \mathbb{N}^*; n \neq 2$ a/ Chứng minh rằng tồn tại hợp n để $u_n \equiv 0\,(\text{mod}\, n)$ b/ Chứng minh rằng có vô hạn hợp số n để $u_n \equiv 0\,(\text{mod}\, n)$

2 Dãy số nguyên truy hồi bậc k

Đối với dãy số dạng un =an +bn +cn+... Bằng cách xác định quan hệ của un;un-1; un-2;.. ta có công thức truy hồi un =P(un-1 ; un-2 ;..) với đa thức P(n) có hệ số nguyên. Khi xét đồng dư của un-1 ; un-2 ;.. ta có thể xác định tính chia hết của un. Ý tưởng giải quyết này vận dụng rất tốt cho lớp bài toán sau đây.

Bài toán 16. Cho dãy số (u_n) $u_n = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n - \left(2-\sqrt{3}\right)^n\right]$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a/ Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta đều có $u_n \in \mathbb{Z}$

b/ Chứng minh rằng $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ta đều có u_n không chia hết cho 3.

Lời giải.

a/ Tính trực tiếp ta được kết quả $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2};\ \forall n \in \mathbb{N}^*$(*)

Do $u_1 = 1;\ \ u_2 = 4$ nguyên. Giả sử $u_{n-1};\ \ u_{n-2}$ nguyên và $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2}$, suy ra u_n nguyên

Theo nguyên lý quy nạp $u_n \in \mathbb{Z};\forall n \in \mathbb{N}^*$ b/ Ta có $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2};\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $u_n \equiv u_{n-1} - u_{n-2}(\text{mod}3)$, suy ra $u_{n+3} \equiv u_{n+2} - u_{n+1} \equiv (u_{n+1} - u_n) - u_{n+1} \equiv -u_n(\text{mod}3)$

Vậy $u_{n+6} \equiv -u_{n+3} \equiv u_n(\text{mod}3)$.

Suy ra $u_{n+6k} \equiv u_n(\text{mod}3)$ mà 2020=4+6.336.

Vậy $u_{2020} \equiv u_4 \equiv 2(\text{mod}3) \Rightarrow a \equiv 2(\text{mod}3)$

Bài toán 17. Cho dãy số (u_n) $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

a/ Chứng minh rằng $u_n \in \mathbb{Z};\forall n \in \mathbb{N}^*$

b/ Chứng minh rằng $n \equiv 0\ (\text{mod}3) \Leftrightarrow u_n \equiv 0\ (\text{mod}2)$

Lời giải.

a/ Tương tự bài toán trên ta tính được $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (*) Bằng phương pháp chứng minh quy nạp ta có $u_n \in \mathbb{Z};\forall n \in \mathbb{N}^*$

b/ +Khi n=3k ta chứng minh $u_n \equiv 0\ (\text{mod}2)$.

Thật vậy k=1 ta có u_3 =2 $\equiv 0\ (\text{mod}2)$. Giả sử $u_{3p} \equiv 0\ (\text{mod}2)$ (1)

Xét u_{3p+3} theo đề toán ta có $u_{3p+3} = u_{3p+2} + u_{3p+1} = 2u_{3p+1} + u_{3p}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $u_{3p+3} \equiv 0\ (\text{mod}2)$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có $u_{3k} \equiv 0\ (\text{mod}2);\forall k \in \mathbb{N}^*$, suy ra khi n=3k thì $u_n \equiv 0\ (\text{mod}2);\forall n \in \mathbb{N}^*$.

+ Để chứng minh chiều ngược lại của bài toán ta cho $u_n \equiv 0\ (\text{mod}2)$ (*) xét n=3k+1.Ta có u_1=1 không chia hết cho 2. Điều này không thỏa (*).

Theo đề toán ta có $u_{3p+4} = u_{3p+3} + u_{3p+2} = 2u_{3p+2} + u_{3p+1}$.

Suy ra nếu u_{3p+1}không chia hết cho 2 thì u_{3p+4} không chia hết cho 2.

Theo nguyên lý quy nạp ta có khi n=3k+1 thì u_n không chia hết cho 2; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Xét n=3k+2 ta có u_2=1 không chia hết cho 2. Điều này không thỏa (*).

Theo đề toán ta có $u_{3p+5} = u_{3p+4} + u_{3p+3} = 2u_{3p+3} + u_{3p+2}$.

Suy ra nếu $u_{3p+2} \not\equiv 0\ (\text{mod}2)$ thì $u_{3p+5} \not\equiv 0\ (\text{mod}2)$.

Theo nguyên lý quy nạp ta có khi n=3k+2 thì $u_n \not\equiv 0\ (\text{mod}2);\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy $u_n \equiv 0\ (\text{mod}2) \Rightarrow n \equiv 0\ (\text{mod}3)$.

Bài toán 18. Cho dãy số (u_n) $u_n = 2^n + \left(3+\sqrt{2}\right)^n + \left(3-\sqrt{2}\right)^n;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

a/ Chứng minh rằng $u_n \in \mathbb{Z};\forall n \in \mathbb{N}^*$

b/ Chứng minh rằng $u_{2020} - u_{2019} + 2u_{2018} \equiv 0\ (\text{mod}7)$;

Lời giải.

a/ Khai triển nhị thức New-Ton các hạng tử , rút gọn ta có $u_n \in \mathbb{Z};\forall n \in \mathbb{N}^*$

b/ Bằng cách tính trực tiếp ta có $u_{n+3} = 8u_{n+2} - 19u_{n+1} + 14u_n;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Thực hiện phép chia cho 7 ta có $u_{n+3} \equiv u_{n+2} + 2u_{n+1} (\bmod 7);\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
Cho n=2017 ta được $u_{2020} - u_{2019} + 2u_{2018} \equiv 0\ (\bmod 7)$
Đối với dãy số dạng un =P(un-1 ; un-2 ;..) ;với đa thức P(n) có hệ số nguyên, ta biến đổi đưa về dạng un =ank +bnk-1 +... hoặc un =an +bn +cn+... Từ đó xác định tính chia hết của un . Minh họa cho phương pháp này ta lần lượt xét một số ví dụ sau đây.

Bài toán 19. Cho dãy số $(u_n) \begin{cases} u_1 = 30 \\ u_{n+1}^2 + u_n(u_n + 8u_n + 16) = 2u_{n+1}(u_n + 4u_n + 8);\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ (*)

Chứng minh rằng khi $n \equiv 1\ (\bmod\ 5)$ thì $u_n \equiv 0\ (\bmod 10)\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải. Biến đổi giả thiết có $\left[\begin{array}{l} u_{n+1} = u_n \\ u_{n+1} = u_n + 8n + 16 \end{array} \right.;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Trường hợp 1 $u_{n+1} = u_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$ suy ra $u_n = u_1 = 30; \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vậy $u_n \equiv 0\ (\bmod 10)$
Trường hợp 2 $u_{n+1} = u_n + 8n + 16\ ; \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $u_n = 4n^2 + 12n + 14 = (2n+3)^2 + 5;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
Do $n \equiv 1\ (\bmod 5)$, suy ra n=5t+1
Khi đó 2n+3=10t+5 , suy ra $u_n = (10t+5)^2 + 5 \equiv 0 (\bmod 10);\ \forall n \in \mathbb{N}^*$
Tóm lại $u_n \equiv 0\ (\bmod 10)$ khi $n \equiv 1\ (\bmod 5)$

Bài toán 20. Cho dãy số
$(u_n) \begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1}(u_n^2 + 1) + 1 = 2u_n^3 - u_n^2 + 2u_n;\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ (*)
a/ Tìm số nguyên tố p sao cho $u_p \equiv 0\ (\bmod p)$
b/ Chứng minh rằng có vô số số hạng của dãy trên thoả $u_k \equiv 0\ (\bmod k)$

Lời giải.
a/ Biến đổi giả thiết có $(u_{n+1} - 2u_n + 1)(u_n^2 + 1) = 0; \forall n \in \mathbb{N}^*$
Do $u_n^2 + 1 > 0;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên $u_{n+1} = 2u_n - 1;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $\forall n \in \mathbb{N}^*$
Theo giả thiết $u_p \equiv 0\ (\bmod p)$
Nếu p=2 thì (**), suy ra $2^2 + 1 \equiv 0 (\bmod 2)$ (vô lý) Vậy p là số nguyên tố lẻ; khi đó gcd(2;p)=1.
Theo định lý Fer-mat ta có $2^p \equiv 2 (\bmod p)$
Vậy $3 \equiv 0 (\bmod p)$ suy ra p=3.
b/ Ta có nhận xét khi $2^n + 1 \equiv 0 (\bmod n)$ thì $2^{2^n+1} + 1 \equiv 0 (\bmod\ 2^n + 1)$ (*)
Thật vậy theo giả thiết $2^n + 1 \equiv 0 (\bmod n)$, suy ra $2^n + 1 = t.n$; t lẻ
Xét $2^{2^n+1} + 1 = 2^{tn} + 1 = (2^n + 1)(2^{n(t-1)} - 2^{n(t-2)} + \cdots + 1) \equiv 0 (\bmod\ 2^n + 1)$
Vậy (*) đúng .
Từ $u_1 = 3 = 2^1 + 1 \equiv 0 (\bmod 1)$ và dựa vào (*) ta có $2^{2^1+1} + 1 \equiv 0 (\bmod\ 2^1 + 1)$
Tức là $u_3 \equiv 0 (\bmod 3)$.
Cứ tiếp tục lý luận trên ta có vô số hạng của dãy thoả $u_k \equiv 0\ (\bmod k)$

Bài toán 21. . Cho dãy số $(u_n) \begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3u_n + 2n^3 - 3n^2 - 3n - 1;\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ (*)

Chứng minh rằng khi p nguyên tố thì $2012 \sum\limits_{i=1}^{p-1} u_i \equiv 0 (\bmod p)$ Lời giải Biến đổi giả thiết có $u_n = 3^n - n^3;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ Chứng minh khi p nguyên tố thì $2012 \sum\limits_{i=1}^{p-1} u_i \equiv 0 (\bmod p)$

Trường hợp p=2 thì $2012\sum\limits_{i=1}^{p-1} u_i = 2012.u_1 = 2012.2 \equiv 0(\bmod p)$(1) Trường hợp là số nguyên tố lẻ $2012\sum\limits_{i=1}^{p-1} u_i = 2012.\sum\limits_{i=1}^{p-1}(3^i - i^3) = 2012\sum\limits_{i=1}^{p-1} 3^i - 2012\sum\limits_{i=1}^{p-1} i^3$ Xét $k^3 + (p-k)^3 = p^3 - 3kp^2 + 3k^2p \equiv 0(\bmod p)$ Cho k chạy từ 1 đến p-1; ta có $2\sum\limits_{i=1}^{p-1} i^3 \equiv 0(\bmod p)$. Suy ra $2012\sum\limits_{i=1}^{p-1} i^3 \equiv 0(\bmod p)$ (*) Mặt khác $2012\sum\limits_{i=1}^{p-1} 3^i = 2012.3.\dfrac{3^{p-1}-1}{3-1} = 1006.3.(3^{p-1}-1)$ Nếu p=3 thì $1006.3(3^{p-1}-1) \equiv 0(\bmod p)$ Nếu p>3 theo định lý Fer-mat có $3^{p-1}-1 \equiv 0(\bmod p)$. Suy ra $2012\sum\limits_{i=1}^{p-1} 3^i \equiv 0(\bmod p)$(**) Từ (*) và (**) suy ra $2012\sum\limits_{i=1}^{p-1} u_i \equiv 0(\bmod p)$ khi p nguyên tố lẻ (2) Từ (1) và (2) khi p nguyên tố thì $2012\sum\limits_{i=1}^{p-1} u_i \equiv 0(\bmod p)$

Bài toán 22. Cho dãy số $(u_n)\begin{cases} u_1 = 7; u_2 = 50; \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n - 1975;\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

Chứng minh rằng $u_{1996} \equiv 0(\bmod 1997)$

Lời giải. Biến đổi giả thiết có $u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n - 1975 \Leftrightarrow u_{n+2} = 4u_{n+1} + 5u_n + 22 - 1997$

Xét $(v_n)\ v_1 = 7; v_2 = 50; v_{n+2} = 4v_{n+1} + 5v_n + 22;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có $v_n \equiv u_n(\bmod 1997)$

Đặt $w_n = 4v_n + 11$ ta có $w_1 = 39; w_2 = 211; w_{n+2} = 4w_{n+1} + 5w_n;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Suy ra $w_n = \dfrac{8}{3}(-1)^n + \dfrac{25}{3}5^n \Rightarrow w_{1996} = \dfrac{8}{3} + \dfrac{25}{3}5^{1996}$

Do $(5^{1996}-1)\vdots 1997;\ (5^{1996}-1)\vdots 3 \Rightarrow (5^{1996}-1)\vdots 3.1997$

Vậy $w_{1996} = \dfrac{8}{3} + \dfrac{25}{3}(3.1997k + 1) = 25.1997k + 11$

Suy ra $4v_{1996} + 11 \equiv 11(\bmod 1997) \Rightarrow v_{1996} \equiv 0(\bmod 1997)$

Vậy $v_{1996} + 11 \equiv 11(\bmod 1997)$.

Bài toán 23. (VMO- năm 2020) Cho dãy số

$(u_n)\begin{cases} u_1 = 5; u_2 = 13; \\ u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1};\ \forall n \in \mathbb{N}^*; n \geq 2 \end{cases}$

a/ Chứng minh 2 số hạng liên tiếp của dãy số trên nguyên tố cùng nhau

b/Chứng minh rằng nếu số nguyên tố p là ước số của u_{2^k} thì p-1 chia hết cho 2k+1

Lời giải.

a/ Ta có $u_n = 2^n + 3^n$ với n nguyên dương.

Bằng phương pháp quy nạp ta chứng minh được un>1 với n nguyên dương

$\gcd(u_n; u_{n+1}) = \gcd\left(2^n + 3^n; 2^{n+1} + 3^{n+1}\right)$
$= \gcd\left(3(2^n + 3^n) - (2^{n+1} + 3^{n+1}); 2^{n+1} + 3^{n+1}\right) = \gcd\left(2^n; 2^{n+1} + 3^{n+1}\right) = \gcd\left(2^n; 3^{n+1}\right) = 1$

b/ Ta có $u_n = 2^n + 3^n$.

Nếu số nguyên tố p là ước số un thì p khác 2; 3

Từ gcd(un;2)=1 suy ra tồn tại x nguyên dương để $2x \equiv 1(\bmod p)$

Khi đó từ giả thiết đề bài ta có

$(2x)^{2^k} + (3x)^{2^k} = (x)^{2^k}\left(2^{2^k} + 3^{2^k}\right) \equiv 0(\bmod p)$

Và $(2x)^{2^k} + (3x)^{2^k} = 1 + (3x)^{2^k} (\bmod p)$

Suy ra $1 + (3x)^{2^k} \equiv 0(\bmod p)$. Vậy $(3x)^{2^{k+1}} \equiv 1(\bmod p)$

Nếu h là số nguyên dương bé nhất mà $(3x)^h \equiv 1(\bmod p)$ thì $2^{k+1} = mh$.

Khi đó h có dạng $2^t; t \leq k+1$.

Nếu t<k+1 thì $(3x)^{2^k} = ((3x)^{2^t})^{2^{k-t}} \equiv 1(\bmod p)$ trái với kết quả $1 + (3x)^{2^k} \equiv 0(\bmod p)$

Vậy t=k+1 và h=2^{k+1}

Từ định lý Fer-mat $(3x)^{p-1} \equiv 1(\bmod p)$ và h là số nguyên dương bé nhất mà $(3x)^h \equiv 1(\bmod p)$ta suy ra p-1 chia hết cho 2^{k+1}

Nhận xét 1. + Câu a bài toán ta cần tìm số hạng tổng quát và sử dụng kỹ thuật" kiểu-Ơclic" như phần I trong bài viết đã trình bày

+ Câu b sử dụng tính chất nếu a;b nguyên tố cùng nhau thì tồn tại 2 số nguyên x ;y để 1=ax+by ; từ đó suy ra $a.x \equiv 1(\bmod b)$

Trong câu b cũng sử dụng tính chất về cấp h của số nguyên a theo mod p " Mọi số n mà an-1 chia hết cho p thì n là bội số của h"

Bài tập áp dụng

Bài 7. Cho dãy số $(u_n)\begin{cases} u_1 = 30 \\ u_{n+1} = u_n + 8n + 16;\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ Chứng minh rằng khi $n \equiv 1 \pmod 5$ thì $u_n \equiv 0 \pmod{10}\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Bài 8. Cho dãy số

$(u_n)\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n - 1;\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

a/Tìm số nguyên tố p sao cho $u_p \equiv 0 \pmod p$

b/Chứng minh rằng có vô số số hạng của dãy trên thoả $u_k \equiv 0 \pmod k$

Bài 9. Cho dãy số (u_n) $u_0 = 0;\ u_1 = 1;\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n; \forall n \in \mathbb{N}$

Chứng minh rằng $n \equiv 0 \pmod{5^k} \Leftrightarrow u_n \equiv 0 \pmod{5^k}$

Bài 10. Cho dãy số (u_n) $u_{n+1} = 5{u_n}^2 - 3u_{n-1}$ Chứng minh rằng với mọi cách chọn các số nguyên u1;u2 thì trong dãy số trên có vô số số hạng chia hết cho 1997 hoặc không có số nào chia hết cho 1997

Bài 11. Cho dãy số $(u_n)\begin{cases} u_0 = 1; u_1 = 3; \\ u_{n+2} = u_{n+1} + 9u_n;\ n = 2k; \forall k \in \mathbb{N}^* \\ u_{n+2} = 9u_{n+1} + 5u_n;\ n = 2k+1; \forall k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ Chứng minh rằng $\sum\limits_{k=1995}^{2000} u_k^2 \equiv 0(\bmod 20)$

Bài 12. (Olympic 30.4 MN-năm 2008). Tìm số nguyên dương $n \leq 2008$thoả mãn $C_{2n}^n \not\vdots 4$.

3 Dãy số sinh bởi hàm không là đa thức

Đối với dãy $u_{n+k} = f(u_{n+k-1}; u_{n+k-2}; \ldots\ldots; u_n)$ thì giải pháp xử lý chính là biến đổi dãy đã cho về dạng đa thức; sau đó dựa vào các cách xử lý đối với đa thức để giải quyết bước tiếp theo. Đối với dãy $u_n = f(n)$ thì giải pháp xử lý chính là dựa vào các định lý về đồng dư đã học để xử lý thành phần bên trong của biểu thức un

Bài toán 24. Cho dãy số $(u_n)\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+2} = \dfrac{u_{n+1}^2 + 2}{u_n};\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ (*)

a/ Chứng minh rằng $u_n > 0;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $u_n \in \mathbb{Z}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

b/ Chứng minh rằng $u_n \equiv \pm 1 \pmod 4;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải.

a/+Chứng minh $u_n > 0;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Thật vậy $u_1 = u_2 = 1 > 0$;

Giả sử $u_{n-1} > 0; u_{n-2} > 0$ *thì* $u_n = \dfrac{u_{n-1}^2 + 2}{u_{n-2}} > 0$

Vậy khi (1)đúng khi chỉ số chạy từ 1 đến n-1 thì (1) đúng khi chỉ số bằng n

Theo nguyên lý quy nạp ta suy ra $u_n > 0;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

+ Chứng minh $u_n \in \mathbb{Z}; \forall n \in \mathbb{N}^*$ (2)

Thật vậy $u_1 = u_2 = 1 \in \mathbb{Z}$, suy ra $u_3 = 3 \in \mathbb{Z}$

Giả sử $u_k; u_{k+1}; u_{k+2} \in \mathbb{Z}$. Xét $u_{k+3} = \dfrac{u_{k+2}^2 + 2}{u_{k+1}}$, suy ra $u_{k+3}u_{k+1} = u_{k+2}^2 + 2$

Sử dụng đẳng thức trên khi chỉ số giảm đi 1 ta có $u_{k+2}u_k = u_{k+1}^2 + 2$

Để khử số hằng số 2 ta lấy hiệu hai đẳng thức trên $u_{k+3}u_{k+1} - u_{k+2}u_k = u_{k+2}^2 - u_{k+1}^2$ $\Leftrightarrow u_{k+1}(u_{k+3} + u_{k+1}) = u_{k+2}(u_{k+2} + u_k)$(**)

Nếu nhận xét về chỉ số ta thấy hai biểu thức $(u_{k+3} + u_{k+1});\ (u_{k+2} + u_k)$chỉ số giảm đi 1 và hai biểu thức $u_{k+1};\ u_{k+2}$chỉ số tăng lên 1

Vậy ta biến đổi

(**)$\Leftrightarrow \dfrac{u_{k+3} + u_{k+1}}{u_{k+2}} = \dfrac{u_{k+2} + u_k}{u_{k+1}}$(hai vế có chỉ số giảm đi 1) (điều này thực hiện được do $u_n > 0;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$)

Từ đó suy ra $\dfrac{u_{k+3} + u_{k+1}}{u_{k+2}} = \dfrac{u_3 + u_1}{u_2} = 4$, suy ra $u_{k+3} = 4u_{k+2} - u_{k+1}$

Do $u_{k+2};\ u_{k+1}$ nguyên nên ta suy ra $u_{k+3} \in \mathbb{Z}$

Theo nguyên lý quy nạp ta suy ra $u_n \in \mathbb{Z}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

b/ +Dùng phương pháp quy nạp ta suy ra $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2};\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

+ Do $u_n = 4u_{n-1} - u_{n-2};\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $u_n \equiv -u_{n-2} \pmod 4;\ \forall n \in \mathbb{N}^*$ suy ra $u_{2k+1} \equiv (\pm 1)^k u_1 \pmod 4$ $u_{2k} \equiv (\pm 1)^k u_2 \pmod 4$

Do $u_1 = 1 \equiv 1 \pmod 4$ và $u_2 = 1 \equiv 1 \pmod 4$. Vậy $u_n \equiv \pm 1 \pmod 4$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Bài toán 24. Cho dãy số

$(u_n)\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 5u_n + \sqrt{24u_n^2 - 8};\ \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ (*)

a/ Chứng minh rằng $u_n \in \mathbb{Z}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

b/ Chứng minh rằng $u_n \equiv \pm 1 \pmod{10};\ \forall n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải.

a/ Ta có $u_1 = 1; u_2 = 5 + \sqrt{24 - 8} = 9 \in \mathbb{Z}$

Giả sử $u_{k-1}; u_k \in \mathbb{Z}$ mà $u_k = 5u_{k-1} + \sqrt{24u_{k-1}^2 - 8} \in \mathbb{Z}$, suy ra

$u_{k-1}; \sqrt{24u_{k-1}^2 - 8} \in \mathbb{Z}$ (**)

Xét $u_{k+1} = 5u_k + \sqrt{24u_k^2 - 8} = 5(5u_{k-1} + \sqrt{24u_{k-1}^2 - 8}) + \sqrt{24(5u_{k-1} + \sqrt{24u_{k-1}^2 - 8})^2 - 8}$

$$= 5(5u_{k-1} + \sqrt{24u_{k-1}^2 - 8}) + \sqrt{24.[49.u_{k-1}^2 - 8 + 10u_{k-1}\sqrt{24u_{k-1}^2 - 8}] - 8}$$

$$= 5(5u_{k-1} + \sqrt{24u_{k-1}^2 - 8}) + \sqrt{24.49u_{k-1}^2 + 24.10u_{k-1}\sqrt{24u_{k-1}^2 - 8}] - 25.8}$$

$$= 5(5u_{k-1} + \sqrt{24u_{k-1}^2 - 8}) + \sqrt{(24u_{k-1})^2 + 2.24.5u_{k-1}\sqrt{24u_{k-1}^2 - 8}] + 25.(24u_{k-1}^2 - 8)}$$

$$= 5(5u_{k-1} + \sqrt{24u_{k-1}^2 - 8}) + 24u_{k-1} + 5\sqrt{24u_{k-1}^2 - 8} \quad (***)$$

Từ (**) và (***) suy ra $u_{k+1} \in \mathbb{Z}$

Theo nguyên lý quy nạp ta suy ra $u_n \in \mathbb{Z}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

b/Từ (*) suy ra $(u_{n+1} - 5u_n)^2 = 24u_n^2 - 8; \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow u_{n+1}^2 + u_n^2 + 8 = 10u_{n+1}.\, u_n; \forall n \in \mathbb{N}^* \quad (1)$

Sử dụng đẳng thức trên khi chỉ số tăng lên 1 ta có

$u_{n+2}^2 + u_{n+1}^2 + 8 = 10u_{n+2}.\, u_{n+1}; \forall n \in \mathbb{N}^*$ (2)

Lấy (2) trừ (1) ta có $u_{n+2}^2 - u_n^2 = 10u_{n+1}.\, (u_{n+2} - u_n); \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow (u_{n+2} - u_n)(u_{n+2} + u_n - 10u_{n+1}) = 0; \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Leftrightarrow u_{n+2} = 10u_{n+1} - u_n \quad \vee \quad u_{n+2} = u_n; \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $u_{n+2} \equiv \pm u_n \pmod{10}; \forall n \in \mathbb{N}^*$ suy ra + $u_{2k+1} \equiv \pm 1 \pmod{10}$ (do $u_1 = 1 \equiv 1 \pmod{10}$)

+ $u_{2k} \equiv \pm 1 \pmod{10}$ (do $u_2 = 9 \equiv -1 \pmod{10}$)

Vậy $u_n \equiv \pm 1 \pmod{10}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Bài toán 25. Cho dãy số

$$(u_n)\begin{cases} u_1 = 1; u_2 = 2; u_3 = 24; \\ u_{n+3} = \dfrac{6u_{n+2}^2 u_n - 8u_{n+2}u_{n+1}^2}{u_{n+1}.u_n}; \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases} \quad (*)$$

a/ Chứng minh rằng $u_n \in \mathbb{Z}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

b/ Chứng minh rằng $u_n \equiv 0 \pmod{n}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Lời giải.

a/ $(*) \Leftrightarrow \dfrac{u_{n+3}}{u_{n+2}} = 6\dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}} - 8\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Đặt $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ta có $v_{n+2} = 6v_{n+1} - 8v_n \quad ; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Bằng phương pháp qui nạp ta chứng minh được $v_n = 4^n - 2^n; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Khi đó

$u_n = \dfrac{u_n}{u_{n-1}}.\dfrac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \ldots .\dfrac{u_2}{u_1} = v_{n-1}.v_{n-2} \ldots .v_1$

Vậy $u_n = (4^{n-1} - 2^{n-1})(4^{n-2} - 2^{n-2}) \ldots \ldots (4 - 2)$

Suy ra $u_n \in \mathbb{Z}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

b/ Chứng minh rằng $u_n \equiv 0 \pmod{n}; \forall n \in \mathbb{N}^*$

Thật vậy $u_n = (4^{n-1} - 2^{n-1})(4^{n-2} - 2^{n-2}) \ldots \ldots (4 - 2)$

+Khi đó $u_n \equiv 0 \pmod{2}$

+Nếu n=p nguyên tố lẻ. Theo định lý Fer-mat ta có $4^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$; $2^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$, suy ra $4^{p-1} - 2^{p-1} \equiv 0 (\bmod p)$ (*). Suy ra $u_n \equiv 0 \pmod{p}$

+ Nếu $n = p_1^{a_1}.p_2^{a_2} \ldots ..p_k^{a_k}$. Suy ra $n = p_1.d_1 = {p_1}^2.d_2 = \ldots . = {p_1}^{a_1}.d_{a_1}$ $n - d_1 = d_1\left(p_1 - 1\right); n - d_2 = d_2\left({p_1}^2 - 1\right); \ldots .; n - d_{a_1} = d_{a_1}\left({p_1}^{a_1} - 1\right)$

Vậy $n - d_1; n - d_2; \ldots; n - d_{a_1}$là a1 các bội số khác nhau của $p_1 - 1$(**)

Từ (*) và (**) suy ra $4^{n-d_1} - 2^{n-d_1} \equiv 0(\bmod p)$;...... là a1

Mà $u_n = (4^{n-1} - 2^{n-1})(4^{n-2} - 2^{n-2}) \ldots\ldots (4-2)$suy ra $u_n \equiv 0 \ (\bmod p_1^{a_1})$

Ta có kết quả tương tự khi có mod $p_2^{a_2}; \ldots.; p_k^{a_k}$ và do chúng nguyên tố cùng nhau $u_n \equiv 0 \ (\bmod p_1^{a_1}.p_2^{a_2} \ldots.p_k^{a_k}); \forall n \in \mathbb{N}^*$

Xét tích các số hạng từ 1 đến n ta hay sử dụng tính chất n! chia hết cho tất cả các số k từ 2 đến n

+Khi p nguyên tố , ta có định lý Will-son (p-1)!+1 chia hết cho p +Khi p;q nguyên tố phân biệt , ta có định lý Fer-mat pq-1 -1 chia hết cho q

Bài toán 26. Cho dãy số $(u_n)\, u_n = (n-1)! + 1; \forall n \in \mathbb{N}^*(*)$. Chứng minh rằng nếu $u_n \equiv 0(\bmod n)$ thì n nguyên tố

Lời giải. Ta chứng minh phản chứng

Nếu n là hợp số n=ab (1<a<n) (*). Suy ra $(n-1)! \equiv 0(\bmod a)$

Mặt khác theo giả thiết $u_n \equiv 0(\bmod n)$. Suy ra $(n-1)! \equiv -1(\bmod a)$.

Vậy $-1 \equiv 0(\bmod a)$, suy ra $a = \pm 1$ Điều này không thoả (*)

Vậy n nguyên tố

Bài toán 27. Cho dãy số $(u_n)\, u_n = \dfrac{a}{n}[(n-k)!.(k-1)! - (-1)^k]; \forall n \in \mathbb{N}^*; 0 < k \le n;$ với a$\in \mathbb{Z}$

Chứng minh rằng nếu p nguyên tố thì u_p nguyên và $u_p \equiv 0(\bmod a)$

Lời giải. $u_n = \dfrac{a}{n}[(n-k)!.(k-1)! - (-1)^k]; \forall n \in \mathbb{N}^*; 0 < k < n$, suy ra $u_p = \dfrac{a}{p}[(p-k)!.(k-1)! - (-1)^k]; 0 < k < n$

+Theo định lý Will-son khi p nguyên tố ta có $(p-1)! \equiv -1(\bmod p)$, suy ra $(p-k)!.\,((p-k)+1)\,.\,((p-k)+2)\,.\,((p-k)+3) \ldots\ldots..((p-k)+k-1) \equiv -1(\bmod p)$, suy ra $(p-k)!.\,(p-(k-1))\,.\,(p-(k-2))\,.\,(p-(k-3)) \ldots\ldots..(p-1) \equiv -1(\bmod p)$

Mà $\begin{cases} (p-(k-1)) \equiv -(k-1)(\bmod p) \\ (p-(k-2)) \equiv -(k-2)(\bmod p) \\ (p-(k-3)) \equiv -(k-3)(\bmod p) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (p-1) \equiv -1(\bmod p) \end{cases}$, suy ra $(p-k)!.(-1)^{k-1}.\,(k-1)! \equiv -1(\bmod p)$, suy ra $(p-k)!.(-1)^{2(k-1)}.\,(k-1)! \equiv -1.(-1)^{k-1}(\bmod p)$, suy ra $(p-k)!.\,(k-1)! - .(-1)^k \equiv 0(\bmod p)$, suy ra $\dfrac{(p-k)!.\,(k-1)! - .(-1)^k}{p} \in \mathbb{Z}$. Vậy $u_p$nguyên và $u_p \equiv 0(\bmod a)$

Bài toán 28. Cho dãy số $(u_n)\, u_n = \dfrac{2013}{n}(C_{2n}^n - 2); \forall n \in \mathbb{N}^*(*)$ Chứng minh rằng với p nguyên tố thì u_p nguyên và $u_p \equiv 0(\bmod 2013)$

Lời giải. +Ta có $C_n^k = \dfrac{n\,!}{k\,!.(n-k)\,!} = \dfrac{n(n-1)(n-2)..(n-k+1)}{k\,!}$ Ta chứng minh C_n^k nguyên bằng qui nạp theo k Xét $C_{2n}^n = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \ldots. + (C_n^n)^2\ \forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $C_{2p}^p = \left(C_p^0\right)^2 + \left(C_p^1\right)^2 + \left(C_p^2\right)^2 + \ldots. + (C_p^p)^2$(I) Trong đó $C_p^k = \dfrac{p\,!}{k\,!.(p-k)\,!} = \dfrac{p(p-1)(p-2)..(p-k+1)}{k\,!}$ nguyên (1)

+ Khi $1 \leq k \leq p-1$ mà p nguyên tố , suy ra gcd(k!;p)=1 suy ra p không chia hết cho k! (2)

Từ (1) và (2) suy ra khi $1 \leq k \leq p-1$ thì $t = \dfrac{(p-1)(p-2)..(p-k+1)}{k\,!}$ nguyên và $C_p^k = p.t$ (II) Mặt khác $C_n^0 = C_n^n$=1 (III) Từ (I);(II);(III) suy ra $C_{2p}^p \equiv 2(\bmod p)$, suy ra $u_p = \dfrac{2013}{p}(C_{2p}^p - 2)$nguyên và $u_p \equiv 0(\bmod 2013)$

Bài toán 29. Cho dãy số (u_n) $u_n = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{2000}$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$(*) trong đó pi là các số nguyên tố thoả tính chất 10<p1<p2<… Chứng minh rằng khi $u_n \equiv 0 \,(\bmod 120)$ thì $n \geq 120$

Lời giải. Ta thấy 120=23.3.5. Do 10<p1<p2<…

Suy ra các gcd$(p_i; 2) = 1$; gcd $(p_i; 3) = 1$;gcd $(p_i; 5) = 1$

Theo định lý Fer-mat có $p_i^2 \equiv 1(\bmod 3)$;${p_i}^4 \equiv 1(\bmod 5)$

Mặt khác pi là số nguyên tố lẻ , suy ra $p_i \equiv \pm 1(\bmod 8)$ hoặc $p_i \equiv \pm 3(\bmod 8)$

Suy ra $p_i^2 \equiv 1(\text{mod8})$. Vậy $p_i^{2000} \equiv 1(\text{mod8})$;$p_i^{2000} \equiv 1(\text{mod3})$;${p_i}^{2000} \equiv 1(\text{mod5})$, suy ra $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i^{2000} \equiv n(\bmod 120)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$, suy ra $u_n \equiv n(\bmod 120)$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Vậy khi $u_n \equiv 0(\bmod 120)$ thì $n \geq 120$

Bài tập áp dụng

Bài 13. Cho dãy số (u_n) $(n-1)u_{n+1} = (n+1)u_n - 2(n-1)$;$\forall n \in \mathbb{N}^*$ Tìm n bé nhất sao cho $u_n \neq 0$; $u_n \equiv 0 \,(\bmod 2000)$; biết rằng $u_{1999} \equiv 0 \,(\bmod 2000)$

Bài 14. Cho dãy số (u_n) $u_n = 2^n$;$\forall n \in \mathbb{N}^*$; Chứng minh $n\,!$ không chia hết cho u_n; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

Bài 15. Cho trước số nguyên dương a và dãy số (u_n) $u_n = (5a)\,!\,(5n)\,!$;$\forall n \in \mathbb{N}^*$; Tìm n bé nhất theo a sao cho $u_n \neq 0$; $u_n \equiv 0 \,(\bmod 2000)$;

Bài 16. Cho dãy số (u_n) $u_n = n^3 - 3^n$;$\forall n \in \mathbb{N}^*$; Tìm n bé nhất sao cho $u_n \neq 0$; $u_n \equiv 0 \,(\bmod 2000)$

Bài 17. Cho 2 dãy số (u_n) $u_n = \left(2222^{5555}\right)^n - 1.$;$\forall n \in \mathbb{N}^*$ Tìm n nguyên dương bé nhất để $u_n \equiv 0 \,(\bmod 5)$

Bài 18. Cho (n -1)! chia hết cho n. Chứng minh n không nguyên tố.

Bài 19. (USA-năm 1986). Tìm số nguyên dương nhỏ nhất N sao cho N ! chia hết cho12^{12}

4 Kết luận

Sáng kiến " Sử dụng phương pháp số học để giải và sáng tác các bài toán dãy số từ đề thi hoc sinh giỏi hiện nay" đã trình bày các kỹ thuật số học trong việc giải quyết bài toán dãy số. Sáng kiến có nội dung chủ yếu là tập trung khai thác các ý tưởng của các đề thi Olympic các nước trong những năm gần đây, phát triển thành lớp bài tập mới, theo các nội dung chính

1. Tính chất số học của các dãy số nguyên dạng hàm đa thức; hàm số mũ.
2. Tính chất số học của các dãy số nguyên cho bởi công thức truy hồi.
3. Tính chất số học của các dãy số có dạng đặc biệt khác
4. Xét phần nguyên của dãy các số thực.

Đề tài đã giảng dạy cho học sinh chuyên toán; các đội tuyển thi cấp Tỉnh của Trường, các đội tuyển thi cấp Quốc Gia của Tỉnh, giúp các em bổ sung kiến thức, rèn luyện kỹ năng tư duy, vận dụng sáng tạo, nâng cao thành tích học sinh giỏi cho Tỉnh nhà. Đề tài này được Viện Nghiên cứu cao cấp về Toán chọn báo cáo trong lớp bồi dưỡng giáo viên dạy chuyên khu vực Miền Trung- Tây Nguyên tổ chức tại thành phố Đồng Hới, tỉnh Quảng Bình vào tháng 7 năm 2019.

Hàng điểm điều hòa

Huỳnh Chí Hào
THPT Chuyên Nguyễn Quang Diêu, Đồng Tháp

1 Tóm tắt phần lý thuyết

1.1 Tọa độ trên trục

Định nghĩa 1. Một đường thẳng được gọi là trục (tọa độ) nếu trên đó đã chọn một điểm O và một vectơ $\overrightarrow{i}$ có độ dài bằng 1 Điểm O gọi là gốc của trục, $\overrightarrow{i}$ được gọi là vectơ đơn vị của trục, hướng của $\overrightarrow{i}$ được gọi là hướng của trục.

Ký hiệu $x'Ox$

Định nghĩa 2 (Tọa độ của một vectơ trên trục)**.** Cho vectơ $\overrightarrow{u}$ nằm trên trục $x'Ox$ có vectơ đơn vị là $\overrightarrow{i}$. Vì $\overrightarrow{u}$ cùng phương $\overrightarrow{i}$ nên tồn tại duy nhất số x sao cho $\overrightarrow{u} = x.\overrightarrow{i}$. Số x được gọi là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{u}$.

Ký hiệu $\overrightarrow{u} = (x)$ hay $\overrightarrow{u}(x)$.

Định nghĩa 3 (Tọa độ của một điểm trên trục)**.** Cho điểm M thuộc trục $x'Ox$. Tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là tọa độ của điểm M.

Ký hiệu $M = (x)$ hay $M(x)$

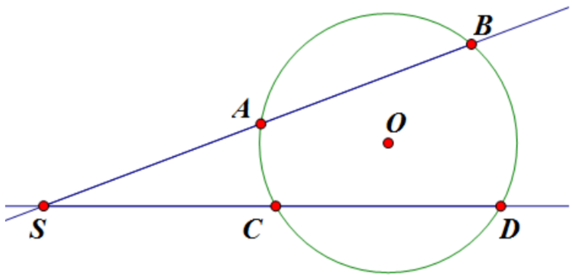
Định nghĩa 4 (Độ dài đại số của vectơ)**.** Tọa độ của của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được gọi là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và ký hiệu là $\overline{AB}$ Chú ý Khi ta viết $\overline{AB}$ có nghĩa là đường thẳng AB đã được xem là một trục với một gốc O nào đó và một vectơ đơn vị $\overrightarrow{i}$ nào đó

1.2 Tính chất

- $\left|\overline{AB}\right| = AB$
- $\overline{AB} = AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{i}$
- $\overline{AB} = -AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{i}$
- $\overline{AB} = -\overline{BA}$
- $\overline{AB} = \overline{CB} - \overline{CA}$, C bất kỳ trên đường thẳng AB
- $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$, C bất kỳ trên đường thẳng AB
- $\overline{AB} = x_B - x_A$

1.3 Các định lý quan trọng có liên quan đến độ dài đại số

Định lý 1 (Định lý Thales (dạng đại số))**.** Cho các bộ ba điểm A, B, C và A', B', C', theo thứ tự thuộc các đường thẳng Δ và Δ'. Nếu các đường thẳng AA', BB', CC' đôi một song song

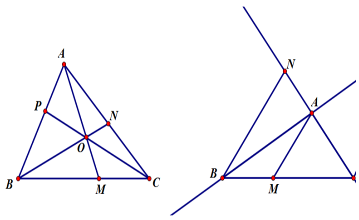


thì $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{B'C'}}$.

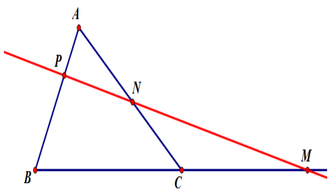
Định lý 2 (Định lý Ceva (dạng đại số))**.** Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P khác A, B, C, theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB.

Khi đó các đường thẳng AM, BN, CP hoặc đồng quy hoặc đôi một song song khi và chỉ khi

$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1.$$



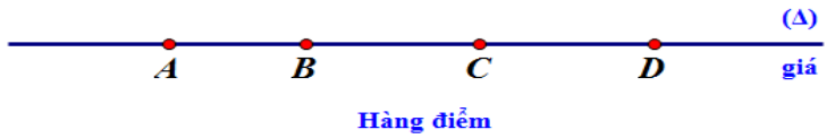
Định lý 3 (Định lý Menelaus (dạng đại số))**.** Cho tam giác ABC và các điểm M, N, P khác A, B, C, theo thứ tự thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó M, N, P thẳng hàng khi và



chỉ khi $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \dfrac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \dfrac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1$.

1.4 Hàng điểm điều hòa

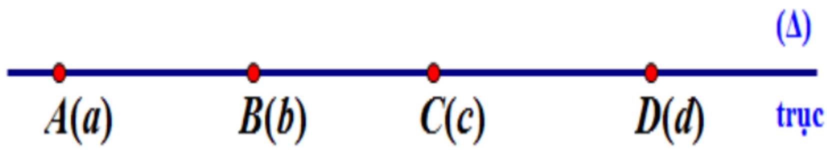
1. Hàng điểm. Bộ bốn điểm đôi một khác nhau, có kể đến thứ tự, cùng thuộc một đường thẳng được gọi là hàng điểm.



2. Tỉ số kép của hàng điểm

Định nghĩa 5. Tỉ số kép của hàng điểm A, B, C, D là một số, kí hiệu là $(ABCD)$ và được xác định như sau

$$(ABCD) = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}.$$



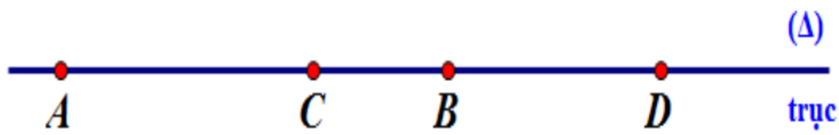
Dạng tọa độ

Nếu $A(a), B(b), C(c), D(d)$ thì $(ABCD) = \dfrac{a-c}{b-c}\dfrac{a-d}{b-d}$.

Tính chất

- $(ABCD) = (CDAB) = (BADC) = (DCBA)$
- $(ABCD) = \dfrac{1}{(BACD)} = \dfrac{1}{(ABDC)}$
- $(ABCD) = 1 - (ACBD) = 1 - (DBCA)$
- $(ABCD) = (ABCD') \Rightarrow D \equiv D'$
- $(ABCD) \neq 1$

Định nghĩa 6 (Hàng điểm điều hòa). Nếu $(ABCD) = -1$ thì hàng điểm A, B, C, D được gọi



là hàng điểm điều hòa.

Nói cách khác Nếu $\dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ thì A, B, C, D được gọi là hàng điểm điều hòa.

$$(ABCD) = -1 \overset{dn}{\Leftrightarrow} \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

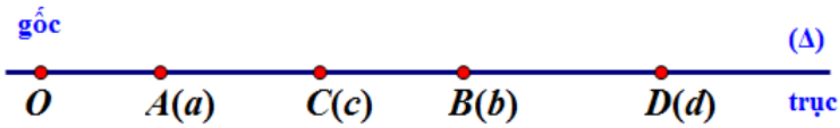
Khi đó ta nói cặp điểm A, B và cặp điểm C, D là hai cặp điểm liên hợp điều hòa.

Nhận xét 1. Nếu $(ABCD) = -1$ thì $(CDAB) = (BADC) = (DCBA) = (BACD) =$

$(ABDC) = -1.$

Biểu thức tọa độ đối với hàng điểm điều hòa

• Hệ thức 1 Nếu $A(a), B(b), C(c), D(d)$thì $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow 2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$



Chứng minh. Chọn một điểm O bất kỳ trên trục là gốc

Ta có $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} \Leftrightarrow \dfrac{a-c}{b-c} = -\dfrac{a-d}{b-d} \Leftrightarrow 2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$

• Hệ thức 2 (hệ thức Descartes) $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}.$

Chứng minh. Chọn $O \equiv A$ $(a = 0)$ trên trục là gốc

Ta có $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow 2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$

$\Leftrightarrow 2cd = b(c + d)$ (do $a = 0$)

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{b} = \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{b} \Leftrightarrow \dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$

• Hệ thức 3 (hệ thức Newton) $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \overline{IA}^2 = \overline{IB}^2 = \overline{IC}.\overline{ID}.$

Chứng minh. Chọn $O \equiv I$ (I là trung điểm của AB) trên trục là gốc

Ta có $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow 2(ab + cd) = (a + b)(c + d)$

$\Leftrightarrow a^2 = cd$ (do $a = -b$)

$\Leftrightarrow \overline{IA}^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$

• Hệ thức 4 (hệ thức Maclaurin) $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AJ}$

(J là trung điểm của CD).

Chứng minh. Chọn $O \equiv A$ trên trục là gốc

Ta có $(ABCD) = -1 \Leftrightarrow \dfrac{2}{\overline{AB}} = \dfrac{1}{\overline{AC}} + \dfrac{1}{\overline{AD}}$

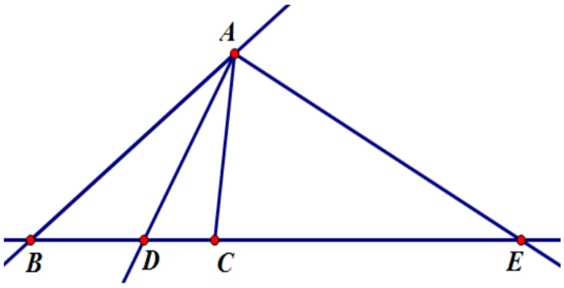
$\Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\dfrac{\overline{AC} + \overline{AD}}{2}$

$\Leftrightarrow \overline{AC}.\overline{AD} = \overline{AB}.\overline{AJ}$

Những hàng điểm điều hòa cơ bản

Định lý 4. Nếu AD, AE theo thứ tự là phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác ABC thì

$(BCDE) = -1$.

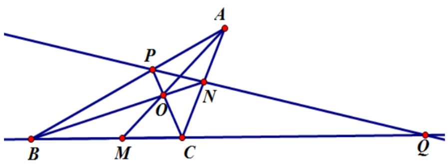


Chứng minh.

Theo tính chất của phân giác trong và phân giác ngoài của tam giác ta có hệ thức $\dfrac{DB}{DC} = \dfrac{AB}{AC}; \dfrac{EB}{EC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Lại do, D nằm trong đoạn BC và E nằm ngoài đoạn BC nên ta có $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\dfrac{AB}{AC}; \dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}} = \dfrac{AB}{AC}$. Suy ra $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}} = -\dfrac{\overline{EB}}{\overline{EC}} \Rightarrow (BCDE) = -1$

Định lý 5. Cho tam giác ABC và điểm O không thuộc các đường thẳng BC, CA, AB. Các đường thẳng AO, BO, CO theo thứ tự cắt BC, CA, AB tại M, N, P. Hai đường thẳng BC, NP



giao nhau tại Q

Khi đó, $(BCMQ) = -1$.

Chứng minh. Áp dụng định lý Ceva cho tam giác ABC với sự đồng quy của AM, BN, CP, ta có hệ thức

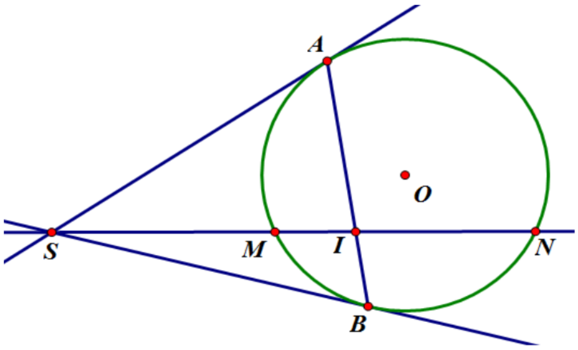
$$\frac{\overline{MB}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = -1 \qquad (1)$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABC với sự thẳng hàng Q, N, P, ta có hệ thức

$$\frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} = 1 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{\overline{MB}}{\overline{MC}} = -\dfrac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \Rightarrow (BCMQ) = -1$

Định lý 6. Từ điểm S nằm ngoài đường tròn (O), ta kẻ tới (O) các tiếp tuyến SA, SB $(A, B \in (O))$. Một đường thẳng qua S cắt (O) tại M, N. Gọi I là giao điểm của AB và MN.

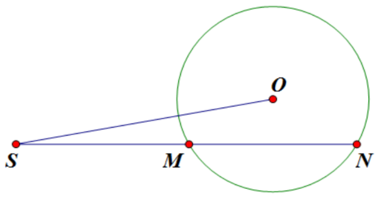


Khi đó, $(SIMN) = -1$.

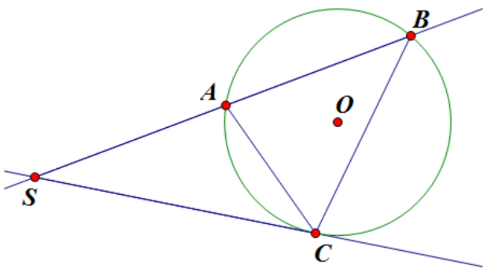
Để chứng minh định lý nầy ta cần sử dụng 3 bổ đề sau

Bổ đề 1. Qua điểm S không thuộc đường tròn (O), kẻ một đường thẳng cắt (O) tại M, N. Khi đó

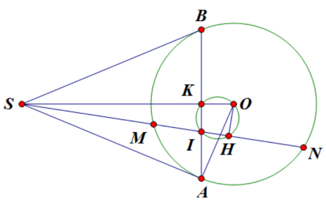
$\overline{SM}.\overline{SN} = SO^2 - R^2$.



Bổ đề 2. Nếu các đường thẳng AB, CD cắt nhau tại S khácA, B, C, D thì A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn khi và chỉ khi $\overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SC}.\overline{SD}$.



Bổ đề 3. Nếu các đường thẳng AB, SC cắt nhau tại S khácA, B thì đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tiếp xúc với SC khi và chỉ khi $\overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SC}^2$.



Chứng minh.

Gọi H là hình chiếu của O trên MN và $K = SO \cap AB$

Do $\widehat{IKO} = \widehat{IHO}$ (cùng bằng 900). Suy ra tứ giác $OHIK$ nội tiếp

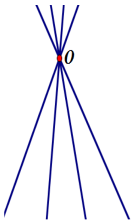
Theo các bổ đề trên và theo hệ thức lượng trong tam giác vuông ta suy ra $\overline{SM}.\overline{SN} = \overline{SA}^2 = \overline{SK}.\overline{SO} = \overline{SI}.\overline{SH}$ Do H là trung điểm của MN nên theo hệ thức Maclaurin ta suy ra $(SIMN) = -1$

2 Tỉ số kép của chùm đường thẳng – Phép chiếu xuyên tâm – Chùm điều hòa

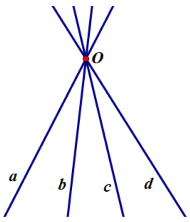
2.1 Chùm đường thẳng và tỉ số kép của nó

a) Các định nghĩa

Định nghĩa 7. Tập hợp các đường thẳng cùng đi qua một điểm được gọi là một chùm đầy đủ đường thẳng.

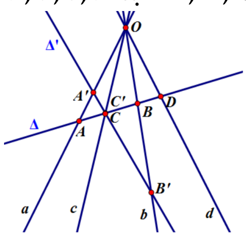


Định nghĩa 8. Bộ bốn đường thẳng đôi một khác nhau, có kể đến thứ tự, cùng thuộc một chùm đầy đủ đường thẳng được gọi là một chùm đường thẳng.



b) Các định lý

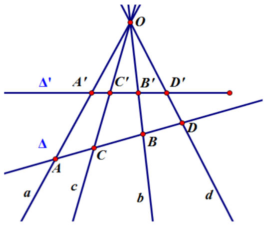
Định nghĩa 9. Cho a, b, c, d là chùm đường thẳng tâm O. Đường thẳng Δ không đi qua O, theo thứ tự cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Đường thẳng Δ' không đi qua O, theo thứ tự cắt a, b, c



tại A', B', C'.

Khi đó $\Delta' // d \Leftrightarrow (ABCD) = \dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$.

Định nghĩa 10. Cho a, b, c, d là chùm đường thẳng tâm O. Đường thẳng Δ không đi qua O, theo thứ tự cắt a, b, c, d tại A, B, C, D. Đường thẳng Δ' không đi qua O, theo thứ tự cắt a, b, c, d



tại A', B', C', D'.

Khi đó $(ABCD) = (A'B'C'D')$.

• Định nghĩa 3 Số không đổi $(ABCD)$ nói trên được gọi là tỉ số kép của chùm a, b, c, d và được kí hiệu là $(abcd)$

Định nghĩa 11 (Phép chiếu xuyên tâm)**.** Cho hai đường thẳng Δ, Δ' và điểm S không thuộc Δ, Δ'. Gọi K là điểm thuộc Δ sao cho $SK//\Delta'$. Gọi f là ánh xạ đi từ tập hợp các điểm thuộc $\Delta \setminus \{K\}$ tới tập hợp các điểm thuộc Δ' , xác định như sau $f(M) = M'$ sao cho S, M, M' thẳng hàng. Ánh xạ f được gọi là phép chiếu xuyên tâm đi từ $\Delta \setminus \{K\}$ tới Δ'. Điểm S được gọi là tâm của f.

Lưu ý

+ Nếu phép chiếu xuyên tâm f biến hàng điểm A, B, C, D thành hàng điểm A', B', C', D' thì $(ABCD) = (A'B'C'D')$ (hay Phép chiếu xuyên tâm bảo toàn tỉ số kép).

b) Các định lý

dlCho hai đường thẳng Δ, Δ' cắt nhau tại O. Các điểm A, B, C thuộc Δ; các điểm A', B', C' thuộc Δ'.

Khi đó AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc đôi một song song $\Leftrightarrow (OABC) = (OA'B'C')$.

Định lý 7. Cho hai chùm $O(ABCO')$ và $O'(ABCO)$.

Khi đó A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow O(ABCO') = O'(ABCO)$.

Định nghĩa 12 (Chùm điều hòa)**.** Chùm a, b, c, d được gọi là điều hòa nếu $(a, b, c, d) = -1$ b) Các định lý Định lý 8 Với chùm a, b, c, d các điều kiện sau là tương đương

i) $(a, b, c, d) = -1$.

ii) Tồn tại một đường thẳng song song với một đường thẳng của chùm và định ra trên ba đường thẳng còn lại hai đoạn thẳng bằng nhau.

iii) Mọi đường thẳng song song với một đường thẳng của chùm định ra trên ba đường thẳng còn lại hai đoạn thẳng bằng nhau.

Định lý 8. Với chùm điều hòa a, b, c, d các điều kiện sau là tương đương

i) $c \perp d$

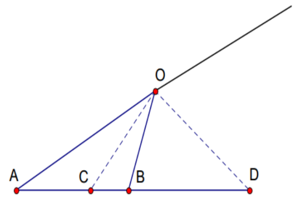
ii) c là một phân giác của các góc tạo bởi a, b

iii) d là một phân giác của các góc tạo bởi a, b

4. Một số kết quả thường sử dụng

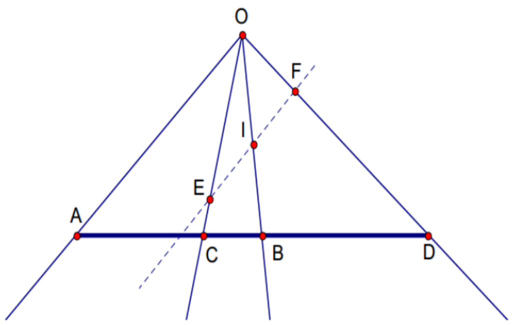
a) Kết quả 1

Cho $(ABCD) = -1$. Lấy O sao cho OC là phân giác trong của $\widehat{AOB}$ thì OD là phân giác ngoài của $\widehat{AOB}$.



b) Kết quả 2

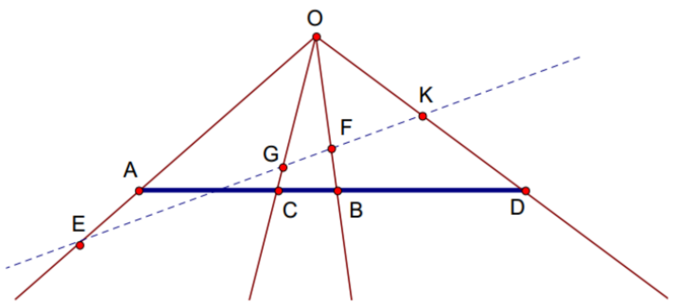
Cho $(ABCD) = -1$ và điểm O nằm ngoài hàng điểm điều hòa trên. Một đường thẳng d cắt ba tia OC, OB, OD lần lượt tại E, I, F. Khi đó I là trung điểm của EF khi và chỉ khi d song



song với OA.

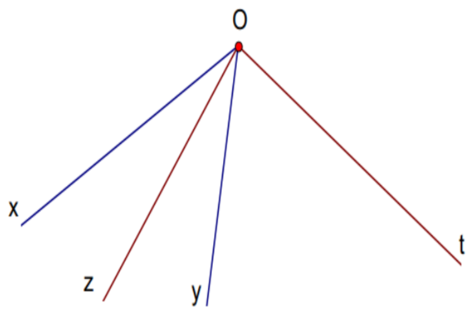
c) Kết quả 3

Cho $(OA, OB, OC, OD) = -1$. Một đường thẳng d bất kì cắt các cạnh OA, OB, OC, OD lần lượt tại E, F, G, H khi đó ta có $(EFGK) = -1$.



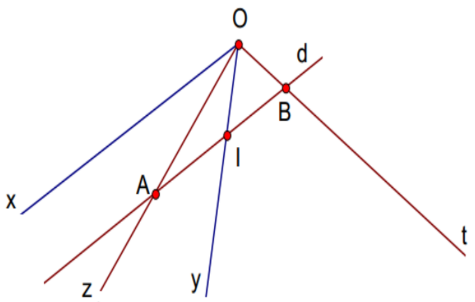
d) Kết quả 4

Cho chùm điều hòa $(Ox, Oy, Oz, Ot) = -1$ khi đó nếu $\widehat{zOt} = 90^0$ thì Oz là phân giác trong của góc xOy và Ot là phân giác ngoài xOy.



e) Kết quả 5

Cho chùm điều hòa $(Ox, Oy, Oz, Ot) = -1$ một đường thẳng d bất kì cắt Oz, Ot, Oy lần lượt tại A, B, I khi đó d song song Ox khi và chỉ khi I là trung điểm của AB.



3 Các ví dụ

Bài toán 1. Cho hai đường thẳng Δ và Δ. Các điểm A, B, C thuộc Δ. Các điểm A', B', C' thuộc Δ. $X = BC' \cap B'C$; $Y = CA' \cap C'A$; $Z = AB' \cap A'B$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng. (định lý Pappus)

Bài toán 2. Cho các tam giác ABC và $A'B'C$. Đặt $X = BC \cap B'C'$; $Y = CA \cap C'A'$; $Z = AB \cap A'B'$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng khi và chỉ khi AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc đôi một song song. (định lý Desargues)

Bài toán 3. Cho tam giác ABC, lấy D, E, F lần lượt thuộc các đoạn BC, CA, AB sao cho 3 đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại một điểm I (EF không song song với BC). Gọi L là giao điểm của AD và EF. Gọi H là hình chiếu của L xuống BC. Chứng minh rằng HL là phân giác của $\widehat{EHF}$. (định lý Blanchet mở rộng)

Bài toán 4. Cho đoạn thẳng AB và số $k > 0$. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $\dfrac{MA}{MB} = k \neq 1$.

Bài toán 5. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (AB không song song CD). M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q. Chứng minh rằng AC, BD, PQ đồng quy.

Bài toán 6. Từ điểm S nằm ngoài đường tròn (O), kẻ tới (O) các tiếp tuyến SA, SB (A, B thuộc (O)). Một đường thẳng qua S, cắt (O) tại hai điểm M, N. Đường thẳng qua M, song song với SA theo thứ tự cắt AB, AN tại E, F. Chứng minh rằng $EM = EF$.

Bài toán 7. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với AC, AB tại E, F (EF không song song với BC). Đặt $K = BI \cap EF$. Chứng minh rằng $\widehat{BKC} = 90^0$.

Bài toán 8. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F(EF không song song với BC). H là hình chiếu của D trên EF. Chứng minh rằng $\widehat{BHD} = \widehat{CHD}$.

Bài toán 9. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi K là giao điểm của AI và EF. Chứng minh rằng $\widehat{KDE} = \widehat{ADF}$.

Bài toán 10. Đường thẳng Δ đi qua đỉnh A của hình bình hành $ABCD$, theo thứ tự cắt các đường thẳng BD, BC tại M, N. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{\overline{AM}} = \frac{1}{\overline{AN}} + \frac{1}{\overline{AP}}$$

Bài toán 11. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là điểm đối xứng với A qua O. Tiếp tuyến với (O) tại D cắt BC tại E. OE theo thứ tự cắt AB, AC tại M, N. Chứng minh rằng $OM = ON$.

Bài toán 12. AD, BE, CF là các đường cao của tam giác nhọn ABC. Đặt $P = BC \cap EF$. Đường thẳng qua D, song song với EF theo thứ tự cắt AB, AC tại Q, R. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác PQR đi qua trung điểm của BC.

Bài toán 13. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AB, AC, AD theo thứ tự cắt CD, DB, BC tại X, Y, Z. Chứng minh rằng O là trực tâm tam giác XYZ.

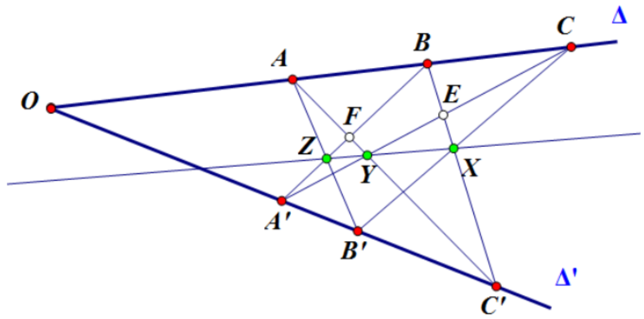
Bài toán 14. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thuộc BC. Các điểm P, Q theo thứ tự thuộc AC, AB. Đặt $O = MP \cap NQ$; $K = BO \cap NP$; $L = CO \cap MQ$. Chứng minh rằng AO, BL, CK đồng quy.

Bài toán 15. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. BO, CO theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F (EF không song song với BC). $I = AO \cap EF$. H là hình chiếu của I trên BC. Chứng minh rằng $\widehat{AHE} = \widehat{OHF}$.

Bài toán 16. Cho tam giác ABC. Các đường phân giác BE, CF cắt nhau tại I (EF không song song với BC). Đường thẳng qua I, vuông góc với EF theo thứ tự cắt BC, EF tại P, Q. Giả sử $IP = 2IQ$. Tính góc $\widehat{BAC}$.

Bài toán 17. Cho hình thang $ABCD$ ($AB//CD$) có $BC = BD$. Đường thẳng đối xứng với CA qua CD theo thứ tự cắt AD, BD tại E, F. Chứng minh rằng $EC = EF$.

Bài toán 18. Cho hai đường thẳng Δ và Δ. Các điểm A, B, C thuộc Δ. Các điểm A', B', C' thuộc Δ. $X = BC' \cap B'C$; $Y = CA' \cap C'A$; $Z = AB' \cap A'B$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng. (định lý Pappus)

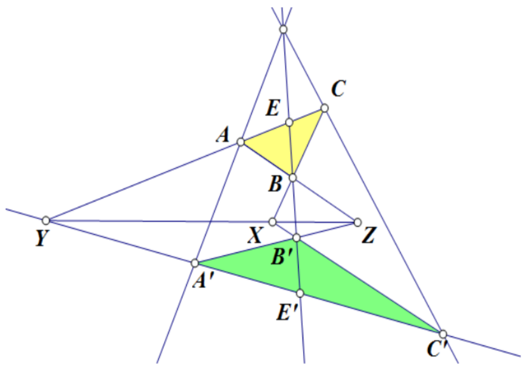


Lời giải.

Ta bỏ qua trường hợp đơn giản $\Delta//\Delta'$ Xét trường hợp Δ và Δ' cắt nhau Đặt $\Delta \cap \Delta' = O$, $E = BC' \cap CA'$, $F = AC' \cap BA'$ Ta có $(BEXC') = (OA'B'C')$ (xét phép chiếu xuyên tâm C) $= (BA'ZF)$ (xét phép chiếu xuyên tâm A) Theo định lý về phép chiếu xuyên tâm ta suy ra $EA', XZ, C'F$ đồng quy Vậy X, Y, Z thẳng hàng.

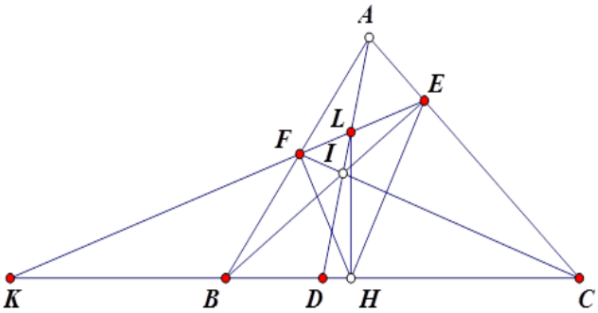
Bài toán 19. Cho các tam giác ABC và $A'B'C$. Đặt $X = BC \cap B'C'$; $Y = CA \cap C'A'$; $Z = AB \cap A'B'$. Chứng minh rằng X, Y, Z thẳng hàng khi và chỉ khi AA', BB', CC' hoặc đồng quy hoặc đôi một song song. (định lý Desargues)

Lời giải.



Ta bỏ qua trường hợp đơn giản $\left[\begin{array}{l} BB'//AC \\ BB'//A'C' \end{array}\right.$ Gọi E, E' theo thứ tự là giao điểm của BB' với $AC, A'C'$ Ta có X, Y, Z thẳng hàng $\Leftrightarrow B\left(AB'CY\right) = B'\left(A'BC'Y\right)$ (định lý về chùm đường thẳng) $\Leftrightarrow (AECY) = (A'E'C'Y) \Leftrightarrow AA', EE', CC'$ hoặc đồng quy hoặc đôi một song song $\Leftrightarrow AA', BB', CC'$ hoặc đồng quy hoặc đôi một song song

Bài toán 20. Cho tam giác ABC, lấy D, E, F lần lượt thuộc các đoạn BC, CA, AB sao cho 3 đường thẳng AD, BE, CF đồng quy tại một điểm I (EF không song song với BC). Gọi L là giao điểm của AD và EF. Gọi H là hình chiếu của L xuống BC. Chứng minh rằng HL là phân giác của $\widehat{EHF}$. (định lý Blanchet mở rộng)



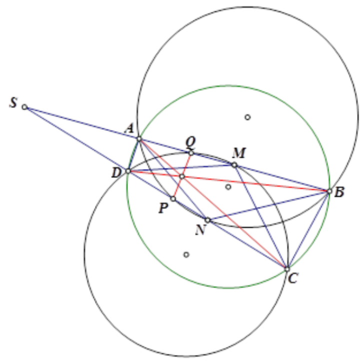
Lời giải.

Đặt $K = BC \cap EF$ Ta có $(KDBC) = -1 \Rightarrow (KLFE) = -1$ (qua phép chiếu xuyên tâm A) Lại có $\widehat{LHK} = 90^0 \Rightarrow HL$ là phân giác của $\widehat{EHF}$.

Bài toán 21. Cho đoạn thẳng AB và số $k > 0$. Tìm quỹ tích các điểm M sao cho $\dfrac{MA}{MB} = k \neq 1$.

Lời giải.

Lấy D, E trên đường thẳng AB sao cho $\dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\dfrac{\overline{EA}}{\overline{EB}} = k \Rightarrow (DEAB) = -1$ Thuận Ta có $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{EA}{EB} = \dfrac{DA}{DB} = k \Rightarrow MD, ME$ là phân giác ngoài và trong của $\widehat{AMB} \Rightarrow \widehat{DME} = 90^0$ $\Rightarrow M$ nằm trên đường tròn đường kính DE Đảo Lấy M' trên đường tròn đường kính $DE \Rightarrow$ $\widehat{DM'E} = 90^0 \Rightarrow M'E$ là phân giác trong của $\widehat{AMB}$ (vì $(DEAB) = -1$ Vậy quỹ tích các điểm



M thỏa mãn điều kiện đề bài là đường tròn đường kính DE.

Chú ý Đường tròn đường kính DE được gọi là đường tròn Apollonius xác định bởi đoạn AB và số k.

Bài toán 22. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (AB không song song CD). M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABN cắt CD tại P. Đường tròn ngoại tiếp tam giác CDM cắt AB tại Q. Chứng minh rằng AC, BD, PQ đồng quy.

Lời giải.

Đặt $S = AB \cap CD$ Ta có $\overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SC}.\overline{SD} = \overline{SQ}.\overline{SM}$ $\overline{SC}.\overline{SD} = \overline{SA}.\overline{SB} = \overline{SP}.\overline{SN}$ Do M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, CD, nên theo hệ thức Maclaurin, suy ra $(SQAB) = -1$ $(SPCD) = -1$ Vậy AC, BD, PQ đồng quy.

Bài toán 23. Từ điểm S nằm ngoài đường tròn (O), kẻ tới (O) các tiếp tuyến SA, SB (A, B thuộc (O)). Một đường thẳng qua S, cắt (O) tại hai điểm M, N. Đường thẳng qua M, song song với SA theo thứ tự cắt AB, AN tại E, F. Chứng minh rằng $EM = EF$.

Lời giải.

Đặt $I = AB \cap MN$ Ta có $(SIMN) = -1$ (hàng điểm điều hòa cơ bản) $\Rightarrow A(SBMN) = -1$ Do $MF//SA \Rightarrow EM = EF$ (định lý về chùm điều hòa)

Bài toán 24. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với AC, AB tại E, F (EF không song song với BC). Đặt $K = BI \cap EF$. Chứng minh rằng $\widehat{BKC} = 90^0$.

Lời giải.

Đặt $L = EF \cap BC$. Gọi D là tiếp điểm của (I) và BC Ta có $\dfrac{\overline{DB}}{\overline{DC}}.\dfrac{\overline{EC}}{\overline{EA}}.\dfrac{\overline{FA}}{\overline{FB}} = \left(-\dfrac{DB}{DC}\right).\left(-\dfrac{EC}{EA}\right).\left(-\dfrac{FA}{FB}\right) = -\dfrac{FA}{EA}.\dfrac{DB}{FB}.\dfrac{EC}{DC} = -1$ Do AD, BE, CF không thể đôi một song song nên theo định lý Ceva ta suy ra AD, BE, CF đồng quy Suy ra $(BCDL) = -1$ (hàng điểm điều hòa cơ bản) $\Rightarrow K(BCDL) = -1$ Mặt khác ta lại có $\Delta KBD = \Delta KBF \Rightarrow \widehat{BKD} = \widehat{BKF}$ Vậy $\widehat{BKC} = 90^0$ (định lý về chùm điều hòa).

Bài toán 25. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc với BC, CA, AB tại D, E, F(EF không song song với BC). H là hình chiếu của D trên EF. Chứng minh rằng $\widehat{BHD} = \widehat{CHD}$.

Ý tưởng Xem H là đỉnh của một chùm điều hòa trong đó có hai đường thẳng vuông góc nhau.

Lời giải.

Đặt $S = EF \cap BC$ Ta có AD, BE, CF đồng quy (theo định lý Ceva) Suy ra $(SDBC) = -1$ (hàng điểm điều hòa cơ bản) Do đó $H(SDBC) = -1$ Vậy $\widehat{BHD} = \widehat{CHD}$ (do $HS \perp HD$, định lý về chùm điều hòa)

Bài toán 26. Cho tam giác ABC. Đường tròn nội tiếp (I) theo thứ tự tiếp xúc với các cạnh BC, CA, AB tại D, E, F. Gọi K là giao điểm của AI và EF. Chứng minh rằng $\widehat{KDE} = \widehat{ADF}$.

Ý tưởng Xem D là đỉnh của một chùm điều hòa trong đó có hai đường thẳng vuông góc nhau.

Lời giải.

Gọi M, N là giao của AI với (I) Ta có $D(AKMN) = -1$ (hàng điểm điều hòa cơ bản) Do $DM \perp DN$ nên $\widehat{MDK} = \widehat{MDA}$ (định lý về chùm điều hòa) Mặt khác ta lại có $\widehat{KDE} = \widehat{MDA}$ Suy ra $\widehat{KDE} = \widehat{ADF}$.

Bài toán 27. Đường thẳng Δ đi qua đỉnh A của hình bình hành $ABCD$, theo thứ tự cắt các đường thẳng BD, BC tại M, N. Chứng minh rằng $\dfrac{1}{\overline{AM}} = \dfrac{1}{\overline{AN}} + \dfrac{1}{\overline{AP}}$.

Lời giải.

Đặt $O = AC \cap BD$. Trên Δ lấy Q sao cho $CQ//BD$ Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $OB = OD$ Do $CQ//BD$ nên theo định lý về chùm điều hòa ta suy ra được $C\,(AQBD) = -1$ Suy ra $(AQNP) = -1$ Khi đó, theo hệ thức Descartes ta có $\dfrac{2}{\overline{AQ}} = \dfrac{1}{\overline{AN}} + \dfrac{1}{\overline{AP}}$ (1) Mặt khác, cũng vì $ABCD$ là hình bình hành nên $OA = OC$ Từ đó, kết hợp với $CQ//BD$ ta có $\overline{AQ} = 2\overline{AM}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{1}{\overline{AM}} = \dfrac{1}{\overline{AN}} + \dfrac{1}{\overline{AP}}$

Bài toán 28. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O). D là điểm đối xứng với A qua O. Tiếp tuyến với (O) tại D cắt BC tại E. OE theo thứ tự cắt AB, AC tại M, N. Chứng minh rằng $OM = ON$.

Lời giải.

Gọi K, L theo thứ tự là giao điểm của AB, AC với DE Trên DE lấy F sao cho $AF//EO$ Ta thấy $\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}sd\overset{\frown}{AC} = \dfrac{1}{2}sd\overset{\frown}{ACD} - \dfrac{1}{2}sd\overset{\frown}{CD} = \dfrac{1}{2}sd\overset{\frown}{ABD} - \dfrac{1}{2}\overset{\frown}{CD} = \widehat{CLD}$ Do đó, tứ giác $BKLC$ nội tiếp Từ đó, nên theo định lý về hệ thức lượng trong đường tròn ta suy ra được $\overline{ED}^2 = \overline{EB}.\overline{EC} = \overline{EK}.\overline{EL}$ Mặt khác, vì O là trung điểm của AD và vì $AF//OE$ nên E là trung điểm của FD Vậy, theo hệ thức Newton ta có $(FDKL) = -1$ Suy ra $A\,(FOMN) = -1$ Từ đó, với chú ý rằng $AF//MN$, theo định lý về chùm điều hòa ta suy ra được $OM = ON$

Bài toán 29. AD, BE, CF là các đường cao của tam giác nhọn ABC. Đặt $P = BC \cap EF$. Đường thẳng qua D, song song với EF theo thứ tự cắt AB, AC tại Q, R. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp của tam giác PQR đi qua trung điểm của BC.

Lời giải.

Gọi M là trung điểm của BC. Theo giả thiết $\widehat{BEC} = \widehat{BFC} = 90^0$ Do đó, bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn Từ đó, với chú ý rằng $QR//FE$, suy ra B, C, Q, R cùng thuộc một đường tròn Vậy, theo định lý về hệ thức lượng trong đường tròn ta suy ra $\overline{DQ}.\overline{DR} = \overline{DB}.\overline{DC}$ (1) Mặt khác, theo định lý về hàng điểm điều hòa ta suy ra $(DPBC) = -1$ Từ đó, với chú ý rằng $MB = MC$, theo hệ thức Maclaurin $\overline{DP}.\overline{DC} = \overline{DB}.\overline{DC}$ (2) Từ (1) và (2), theo định lý về hệ thức lượng trong đường tròn, suy ra đường tròn ngoại tiếp của tam giác PQR đi qua trung điểm của BC.

Bài toán 30. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AB, AC, AD theo thứ tự cắt CD, DB, BC tại X, Y, Z. Chứng minh rằng O là trực tâm tam giác XYZ.

Lời giải.

Qua X, kẻ tới O các tiếp tuyến XM, XN. Gọi P, Q là giao điểm của MN với AB, CD Suy ra $(XPAB) = (XQDC) = -1$ Do đó AD, BC, PQ đồng quy $\Rightarrow Z \in PN$ (1) Mặt khác, ta lại có $(XPAB) = (XQCD) = -1$ Suy ra AC, BD, PQ đồng quy $\Rightarrow Y \in PN$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $MN \equiv YZ$ Do $OX \perp MN \Rightarrow OX \perp YZ$ Chứng minh tương tự ta cũng được $OZ \perp YX$ Vậy O là trực tâm tam giác XYZ.

Bài toán 31. Cho tam giác ABC. Các điểm M, N thuộc BC. Các điểm P, Q theo thứ tự thuộc AC, AB. Đặt $O = MP \cap NQ$; $K = BO \cap NP$; $L = CO \cap MQ$. Chứng minh rằng AO, BL, CK đồng quy.

Lời giải.

Đặt $I = BL \cap CK$; $U = BO \cap MQ$; $V = CO \cap NP$ Ta có $B(ALOC) = (QLMU) = (MULQ)$ (theo tính chất của tỉ số kép của hàng) $= (PKVN)$ (xét phép chiếu xuyên tâm O) $= C(AKOB)$ Từ đó suy ra A, I, O thẳng hàng Vậy AO, BL, CK đồng quy.

Bài toán 32. Cho tam giác ABC và điểm O nằm trong tam giác. BO, CO theo thứ tự cắt AC, AB tại E, F (EF không song song với BC). $I = AO \cap EF$. H là hình chiếu của I trên BC. Chứng minh rằng $\widehat{AHE} = \widehat{OHF}$.

Ý tưởng Xem H là đỉnh của một chùm điều hòa trong đó có hai đường thẳng vuông góc nhau.

Lời giải.

Đặt $S = EF \cap BC$; $T = SO \cap BC$ Ta có $(BCTS) = -1$ (hàng điểm điều hòa cơ bản) Suy ra $(FEIS) = -1$ (qua phép chiếu xuyên tâm A) $(AOTI) = -1$ (qua phép chiếu xuyên tâm F) Do đó $H(FEIS) = -1$; $H(AOTI) = -1$ Suy ra $\widehat{IHE} = \widehat{IHF}$; $\widehat{IHA} = \widehat{IHO}$ (do $HI \perp HS$, định lý về chùm điều hòa) Vậy $\widehat{AHE} = \widehat{OHF}$.

Bài toán 33. Cho tam giác ABC. Các đường phân giác BE, CF cắt nhau tại I (EF không song song với BC). Đường thẳng qua I, vuông góc với EF theo thứ tự cắt BC, EF tại P, Q. Giả sử $IP = 2IQ$. Tính góc $\widehat{BAC}$.

Lời giải.

Đặt $K = EF \cap BC$; $R = AK \cap PQ$; $D = IA \cap BC$; $L = IA \cap EF$ Ta có $(CBKD) = -1$ (hàng điểm điều hòa cơ bản) $\Rightarrow (AILD) = -1$ (qua phép chiếu xuyên tâm E) $\Rightarrow (RIQP) = -1$ (qua phép chiếu xuyên tâm K) Suy ra $\dfrac{RQ}{RP} = \dfrac{IQ}{IP} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow Q$ là trung điểm $PR \Rightarrow$ ΔKPR cân tại $K \Rightarrow \widehat{AKE} = \widehat{BKE} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{KAC}$ (1) Mặt khác ta lại có $(BCDK) = -1$ $\Rightarrow A(BCDK) = -1$ Do $\widehat{BAD} = \widehat{CAD} \Rightarrow \widehat{CAK} = \widehat{xAK}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{BAC} = 60^0$

Bài toán 34. Cho hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$ có $BC = BD$. Đường thẳng đối xứng với CA qua CD theo thứ tự cắt AD, BD tại E, F. Chứng minh rằng $EC = EF$.

Lời giải.

Lấy K sao cho B là trung điểm của đoạn AK Vì $AK//DC$ và $BC = BD$ nên $AKCD$ là hình thang cân Suy ra $\widehat{KDC} = \widehat{ACD}$ Do $\widehat{ACD} = \widehat{ECD} \Rightarrow \widehat{KDC} = \widehat{ECD}$ Do đó $DK//CE$ (1) Mặt khác vì $DC//AK$ và $BA = BK \Rightarrow D(CBAK) = -1$ (định lý về chùm điều hòa) Do đó $D(CFEK) = -1$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $EC = EF$ (định lý về chùm điều hòa)

4 Bài tập áp dụng

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A và $\widehat{A} = 120^0$. D thuộc đoạn BC sao cho $BC = 4CD$. K thuộc đoạn AB sao cho $CK \perp AC$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt AC tại E khác A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác KCD cắt AB tại F khác K. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD,KCD cắt nhau tại G khác D. Chứng minh rằng BE, CF, DG đồng quy.

Bài 2. Cho tam giác ABCnội tiếp đường tròn (O), các đường cao AA', BB', CC'. AA' cắt (O) tại điểm thứ hai D. E thuộc $A'B'$ sao cho $BE \perp OA$. DB' cắt (O) tại điểm thứ hai F. BF cắt AE tại K. Chứng minh rằng K là trung điểm $B'C'$.

Bài 3. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O). AC cắt BD tại E, AD cắt BC tại F. Trung điểm của AB và CD lần lượt là G, H. Chứng minh rằng EF là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác EGH.

Bài 4 (KHTN vòng 3 năm 2011-2012 ngày thứ hai)**.** Cho tứ giác lồi $ABCD$ không là hình thang nội tiếp đường tròn (O). AD giao BC tại E. I là trung điểm CD. EI cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác EAB tại M khác E. AC giao BD tại F. EF cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác EAB tại N khác E. Chứng minh rằng bốn điểm C, D, N, M cùng thuộc một đường tròn.

Bài 5 (KHTN vòng 2 năm 2012-2013 ngày thứ nhất)**.** Cho tam giác nhọn ABC. D là một điểm thuộc đoạn AC. Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD cắt đoạn thẳng BC tại E khác B. Tiếp tuyến tại B, D của đường tròn ngại tiếp tam giác ABD cắt nhau tại T. AT cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD tại F khác A. CF giao DE tại G. AG giao BC tại H. M là trung điểm của AF. AE giao MD tại N. Chứng minh rằng $HN//AT$.

Bài 6 (IMO Shortlist 1995)**.** Cho tam giác ABC có D, E, F lần lượt là tiếp điểm trên BC, CA, AB của đường tròn nội tiếp tam giác. Gọi X là một điểm bên trong tam giác ABC sao cho đường tròn nội tiếp tam giác XBC tiếp xúc với BC tại D, tiếp xúc với XB, XC theo thứ tự tại Y, Z. Chứng minh E, F, Y, Z đồng viên.

Bài 7 (China TST 2002)**.** Cho tứ giác lồi $ABCD$, gọi E, F, P lần lượt là giao điểm của AD và BC, AB và CD, AC và BD. Gọi O là chân đường vuông góc hạ từ P xuống EF. Chứng minh rằng $\widehat{AOD} = \widehat{BOC}$

Bài 8 (Balkan MO 2007)**.** Cho ΔABC vuông tại A. $D \in AC$ và E đối xứng với A qua BD, F là giao điểm của đường thẳng qua D vuông góc với BC và đường CE. Chứng minh rằng AF, DE, BC đồng quy.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Minh Hà (CB), Nguyễn Xuân Bình – Toán nâng cao hình học 10 NXB GD 2000.

[2] Đoàn Quỳnh (CB), Văn Như Cương, Trần Nam Dũng, Nguyễn Minh Hà, Đỗ Thanh Sơn, Lê Bá Khánh Trình – Tài liệu chuyên toán hình học NXB GD 2010.

VỀ MỘT SỐ BÀI TOÁN HÌNH HỌC PHẲNG TỪ CÁC KỲ THI OLYMPIC CÁC NƯỚC

Nguyễn Bá Đang

Hội Toán học Hà Nội

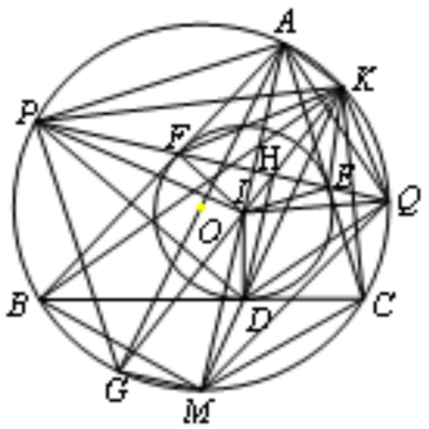
Tóm tắt nội dung

Học sinh Việt Nam có thế mạnh về các bài hình học phẳng, nhiều năm đề thi chọn học sinh giỏi Quốc gia thường có hai bài "cực khó" so với đề thi Olympiad các nước song nhiều học sinh Việt Nam vẫn giải tốt.

Bài viết này tuyển chọn các đề thi toán Olympiad các nước đặc biệt kì thi Sharygin Geometry Olympiad của Nga và Iranian Geometry Olympiad (IGO) là hai kì thi chuyên về hình học cho các nước tham gia. Mỗi bài có nhiều cách giải phù hợp với học sinh Việt Nam theo Chương trình Phổ thông 2018.

1 Bài toán

Bài toán 1. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), đường tròn nội tiếp (I) tiếp xúc các cạnh BC, CA, AB thứ tự tại D, E, F. Đường thẳng EF cắt đường tròn (O) tại P và Q (P gần F). Chứng minh $\angle DPA + \angle ADQ = \angle QIP$. ***Lời giải.*** Đường tròn (AEF) cắt đường tròn (O) tại K, giả thiết E, F là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp (I) với cạnh AC, AB nên IE vuông góc AC và IF vuông góc AB, suy ra tứ giác AFIE nội tiếp, đường kính AI , ta có $\angle AKI = 90^0$ suy ra năm điểm A, F, I, E, K nằm trên đường tròn đường kính AI , ta có $\angle AFK = \angle AEK$ suy ra $\angle BFK = 180^0 - \angle AFK = 180^0 - \angle AEK = \angle CEK$ (1)



$\angle FBK = \angle ABK = \angle ACK = \angle ECK$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra tam giác BFK và CEK đồng dạng (g.g) , ta có $\frac{BK}{CK} = \frac{BF}{CE}$, D, E, F là các tiếp điểm , ta có $BD = BF$ và $CD = CF$, ta có $\frac{BK}{CK} = \frac{BD}{CD}$ suy ra KD là phân giác góc $\angle BKC$, kéo dài AI cắt đường tròn (O) tại M , ta có $\angle BKM = \angle MKC$ suy ra K, D, M thẳng hàng.

KI cắt PQ tại H và đường tròn (O) tại G, AK vuông góc KI suy ra AG là đường kính đường tròn (O) suy ra AM vuông góc GM, giả thiết AI vuông góc EF suy ra GM song song EF hay GM song song PQ , ta có $\overset{\frown}{GP} = \overset{\frown}{MQ}$, ta có $\angle PKH = \angle PKG = \angle MKQ, \angle KPQ = \angle KMQ$ suy ra tam giác KPH và KMQ đồng dạng (g.g) , ta có $\frac{KP}{KH} = \frac{KM}{KQ}$.

Ta có $\angle FKE = \angle FAE = \angle BAC = \angle BKC, \angle KEF = 180^0 - \angle FAK = 180^0 - \angle BAK = \angle BCK$ suy ra KEF và KCB đồng dạng (g.g), tam giác IEF và tam giác MCB đồng dạng KI cắt EF tại H, KM cắt BC tại D , ta có $\frac{KH}{KI} = \frac{KD}{KM}$, ta có $\frac{KP}{KI} = \frac{KP}{KH}\frac{KH}{KI} = \frac{KM}{KQ}\frac{KD}{KM} = \frac{KD}{KQ}$ suy ra tam giác KPI và KDQ đồng dạng (c.g.c) , ta có $\angle KIP = \angle KQD$.

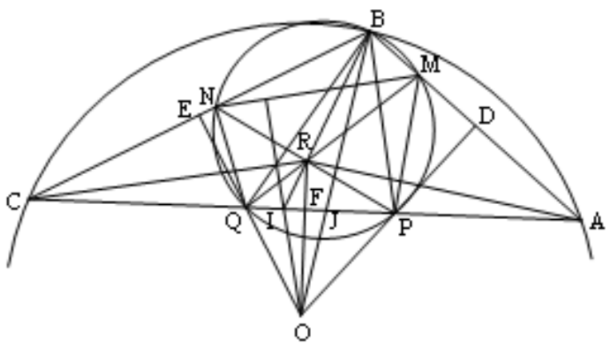
$\frac{KH}{KI} = \frac{KD}{KM}$ và $\frac{KP}{KH} = \frac{KM}{KQ}$ nhân hai đẳng thức với nhau $\frac{KP}{KI} = \frac{KD}{KQ}$ suy ra tam giác KPD và KIQ đồng dạng , ta có $\angle KPD = \angle KQI$ suy ra

$\angle DPA + \angle AQD = \angle DPK + \angle KPA + \angle KQD - \angle KQA = \angle DPK + \angle KQD = \angle QIK + \angle KIP = \angle QIP$

Bài toán 2 (Sharygin Geometry Olympiad năm 2023)**.** Cho tam giác ABC, góc $\angle ABC > 90^0$, P và Q trên AC sao cho $PB = PA$ và $QC = QB$, đường tròn ngoại tiếp tam giác BPQ cắt AB tại M và BC tại N.

a) R là giao của MQ và NP. Chứng minh $RC = RA$ (lớp 8 và 9)

b) BR cắt AC tại I. Chứng minh MN vuông góc OI (Lớp 9, 10)

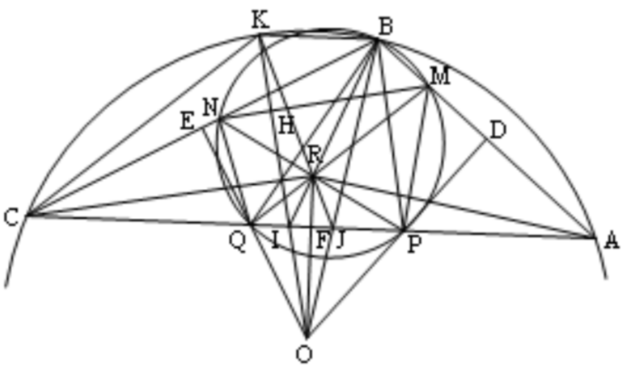


Lời giải. Giả thiết P, Q trên AC thỏa mãn $PB = PA$ và $QC = QB$ suy ra P nằm trên trung trực AB, Q thuộc trung trực BC giao điểm hai trung trực là O suy ra O tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , ta có $\angle OEB = \angle ODB = 90^0$ suy ra tứ giác ODBE nội tiếp suy ra

$\angle POQ = \angle DOE = 180^0 - \angle DBE = 180^0 - \angle ABC$ Giả thiết $\angle PAB = \angle PBA$, tứ giác BQPM nội tiếp , ta có $\angle MQP = \angle MBP = \angle ABP$, ta có $\angle MQP = \angle BAC$, tương tự $\angle NPC = \angle BCA$.

Giả thiết PN và QM cắt nhau tại R , ta có $\angle PRQ = 180^0 - \angle NPC - \angle MQA = 180^0 - \angle BCA - \angle BAC = \angle ABC$, ta có $\angle POQ = 180^0 - \angle ABC = 180^0 - \angle PRQ$ suy ra tứ giác OPRQ nội tiếp.

OR cắt AC tại F , ta có $\angle ROP = \angle RQP = \angle MQA = \angle MBP = \angle MAF$, ta có $\angle OFA = \angle ODA = 90^0$ suy ra OR vuông góc AC , ta có $FC = FA$, ta có $RC = RA$.



b. Gọi I là giao điểm của BR với AC, kẻ BK song song AC suy ra tứ giác CKBA là hình thang cân suy ra OB cắt AC tại J, OF là trục đối xứng AC suy ra J đối xứng với I qua OF.

OI cắt MN tại H và cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại K. Xét tứ giác HICN, ta có $\angle IHN = 360^0 - (\angle HNC + \angle NCI + \angle CIH) =$

$= (180^0 - \angle HNC) + (180^0 - \angle NCI) - \angle HIC = \angle BNM + (180^0 - \angle NCI) - \angle OKB =$

$= \angle BQM + (180^0 - \angle BCA) - \angle OKB = \angle BQA - \angle MQA + \angle ABC + \angle BAC - \angle OKB =$

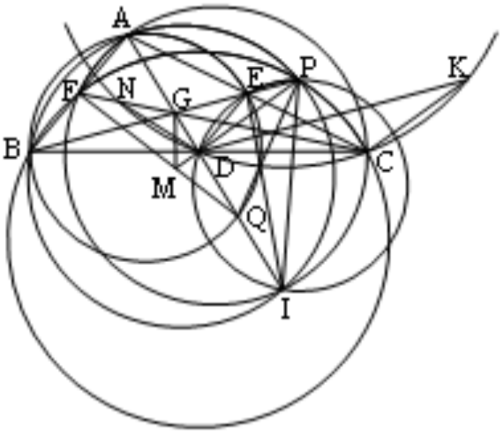
$= 2\angle BCA - \angle BAC + \angle ABC + \angle BAC - \angle OKB = 2\angle BCA + \angle ABC - \angle OKB =$

$= 2\angle BCA + \angle ABC - \angle KBC - \angle CBO = 2\angle BCA + \angle ABC - \angle BCA - \angle CBO = \angle BCA + \angle ABC - \angle CBO =$

$= \angle BCA + \angle ABC - (90^0 - \angle BOE) = 180^0 - \angle BAC - 90^0 + \angle BAC = 90^0$ suy ra OH vuông góc MN.

Bài toán 3. Cho tam giác ABC, D, E và F thứ tự là trung điểm BC, CA, AB. Đường tròn (BCF) cắt BE tại P, đường tròn (ABE) cắt AD tại Q (D ở giữa A và Q), DP và FQ cắt nhau tại M. Chứng minh trọng tâm tam giác ABC thuộc đường tròn (PQM).

Lời giải.



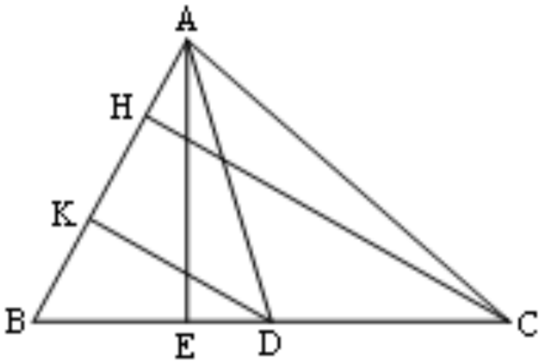
Đường tròn (BCF) cắt BE tại P , ta có $GB.GP = GF.GC$, đường tròn (ACF) cắt AD tại I , ta có $AG.GI = GF.GC$ suy ra

$GP.GE = GP.\frac{1}{2}GB = \frac{1}{2}CG.GF = \frac{1}{2}AG.GI = GD.GI$ suy ra tứ giác EPID nội tiếp , ta có $\angle EGD = \angle EID$

Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng kẻ từ C song song PD, và từ D song song BP , ta có $\angle CKD = \angle DPB$, tứ giác NDCK nội tiếp $\angle CND = \angle CKD$ (1)

Đường tròn (DCK) cắt CF tại N suy ra tứ giác FNDQ nội tiếp , ta có $\angle CND = \angle DQF = \angle GQF$ (2)

Từ (1) và (2) , ta có $\angle FQG = \angle MQG = \angle DPB = \angle MPG$ từ đó suy ra tứ giác GPQM nội tiếp hay trọng tâm G của tam giác ABC thuộc đường tròn (PQM).



Cách 2. Gọi H và K là hình chiếu của C và D trên AB và E là hình chiếu của A trên BC suy ra

$$\cot BAD = \frac{AK}{DK} = \frac{AH + AB}{CH} = \frac{CH\cot A + CH(\cot A + \cot B)}{CH} = = 2\cot A + \cot B.$$

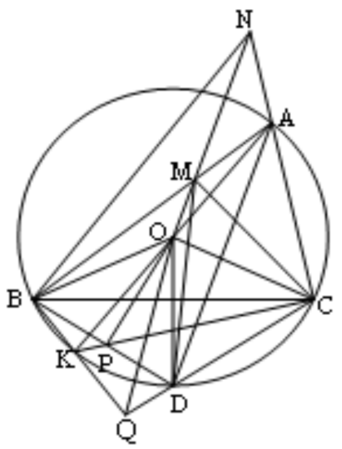
$\cot ADC = \dfrac{DE}{AE} = 2\cot BFC + \cot PBC$

Thay vào , ta có $\cot BPD = \cot A + \cot B + \cot C$. tương tự $\cot GQF = \cot A + \cot B + \cot C$, ta có $\angle GQF = \angle GPM$ suy ra trọng tâm G của tam giác ABC thuộc đường tròn (PQM).

Bài toán 4 (China 2021)**.** Cho tam giác nhọn ABC (AB < AC) nội tiếp đường tròn (O), đường kính AK, phân giác góc $\angle BAC$ cắt đường tròn (O) tại D, đường thẳng qua O song song AD cắt AB, AC lần lượt tại M và N, đường thẳng BD cắt CK tại P, đường thẳng BK cắt CD tại Q.

Chứng minh $\angle ONB + \angle OPB = \angle OMC + \angle OQC$.

Lời giải.



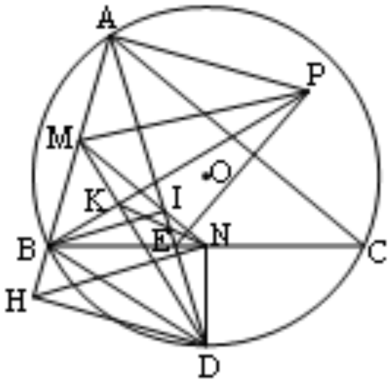
Giả thiết AK là đường kính đường tròn (O) suy ra $\angle PCB = \angle KCP = \angle KAB = \angle OAB = \angle OBM$ $\angle PBC = \angle DBC = \angle DAC = \angle DAB = \angle OMB$ suy ra tam giác BOM và CPB đồng dạng (g.g) , ta có $\dfrac{BM}{CB} = \dfrac{BO}{CP} = \dfrac{CO}{CP}$, tam giác ACK vuông , ta có $\angle OCP = 90^0 - \angle OCA = \angle ABC = \angle MBC$ suy ra tam giác BCM và CPO đồng dạng (c.g.c);

$\angle BCD = \angle DAC = \angle ONC$, $\angle CBQ = \angle CBK = \angle CAK = \angle ACO$ suy ra CON và OBQ đồng dạng (g.g) , ta có $\dfrac{CN}{BC} = \dfrac{CO}{BQ} = \dfrac{OB}{BQ}$ suy ra tam giác CNB và BOQ đồng dạng (c.g.c) suy ra

$\angle OPB - \angle OQC = (\angle OBP + \angle OPB) - (\angle OCQ + \angle OQC) == (180^0 - \angle BOP) - (180^0 - \angle COQ) = \angle COP - \angle BOQ = \angle BDC - \angle BNC =$

$= (\angle ODC + \angle ADN) - (\angle ONB + AND) = \angle ODC - \angle ONB$, ta có $\angle ONB + \angle OPB = \angle OMC + \angle OQC$.

Bài toán 5 (HongKong 2021)**.** Cho tam giác nhọn ABC, đường phân giác góc A cắt cạnh BC tại E và cắt đường tròn ngoại tếp tam giác ABC tại D, M là trung điểm AB, P là điểm sao cho PA vuông góc AB, và MD vuông góc PB. Chứng minh tam giác AEP cân.



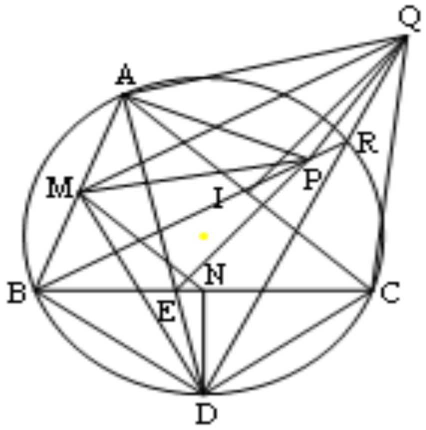
Lời giải. Gọi N là trung điểm BC, giả thiết $MA = MB$, $NB = NC$ suy ra MN song song AC và $\angle BND = 90^0$, K là giao điểm BP và MD theo giả thiết DM vuông góc BP , ta có $\angle BKD = 90^0$ suy ra tứ giác BKND nội tiếp. Gọi H là hình chiếu của D trên AB , ta có $\angle BHD = 90^0$ suy ra năm điểm B, K, N, D, H nằm trên đường tròn đường kính BD , ta có $\angle NDH = \angle ABE$, giả thiết AD là phân giác góc $\angle BAC$, ta có $\angle NHD = \angle NBD = \angle BAD$ suy ra tam giác ABE và HDN đồng dạng (g.g) , ta có

$$\frac{AB}{HD} = \frac{AE}{HN} \qquad (1)$$

MN cắt AD tại I, MN song song AC , ta có $\angle AIM = \angle IAC = \angle DAC = \angle BAD = \angle MAI$ suy ra tam giác AMI cân , ta có $MA = MB = MI$, ta có $\angle AIB = 90^0$, ta có $\angle BID = 90^0$ suy ra I thuộc đường tròn đường kính BD , ta có $\angle IBN = \angle IDN$, tam giác ABE và HDN đồng dạng theo tính chất đồng dạng suy ra HN vuông góc AD suy ra BI song song HN suy ra BINH là hình thang cân suy ra tam giác MHN cân có $MH = MN$.

Giả thiết PA vuông góc A suy ra tứ giác AMKP nội tiếp , ta có $\angle APB = \angle HMD$ suy ra tam giác APB và HMD đồng dạng , ta có $\dfrac{AP}{HM} = \dfrac{AB}{HD}$ (2), kết hợp (1), (2) , ta có $\dfrac{AP}{HM} = \dfrac{AE}{HN}$.

Mặt khác $\angle PAE = 90^0 - \angle BAE = 90^0 - \angle DHN = \angle NHM$ (3) suy ra tam giác MHN và PAE đồng dạng (c.g.c) , ta có $PA = PE$.



Cách 2 Dùng kết quả của APMO 2017.

Tam giác ABC (AB < AC), đường phân giác góc A cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC tại D, Q trên trung trực AC và đường thẳng qua A vuông góc AD. Chứng minh (AQD) đi qua trung điểm AB. Gọi M, N, I lần lượt là trung điểm AB, BC, CA suy ra DN vuông góc BC, QA vuông góc AD , ta có $\angle QAC = 90^0 - \angle CAD = 90^0 - \dfrac{1}{2}\angle BAC = \angle CDN$ suy ra tam giác CND và QIA đồng dạng (g.g) suy ra

$\dfrac{DN}{AI} = \dfrac{DN}{MN} = \dfrac{DC}{QA}$ $\angle DNM = 90^0 + \angle MNB = 90^0 + \angle ACB = (\angle QAI + \angle CAQ) + \angle ACB = \angle QCD$

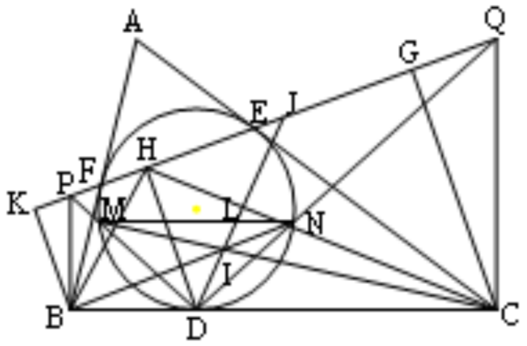
suy ra tam giác DNM và DCQ đồng dạng , ta có $\dfrac{DM}{DQ} = \dfrac{DN}{DC}$ và $\angle MDN = \angle QDC$, ta có $\angle MDQ = \angle MDN + \angle NDQ = \angle QDC + \angle NDQ = \angle CDN$ suy ra tam giác MDQ và NDC đồng dạng (c.g.c) , ta có $\angle DMQ = \angle DNC = 90^0$ suy ra (AQD) đi qua trung điểm AB.

Bài toán 6. Cho tam giác ABC không cân, đường tròn nội tiếp tiếp xúc với cạnh BC, CA, AB tại D, E và F. Từ B và C dựng đường thẳng vuông góc BC cắt EF tại P và Q, PD và QD cắt đường tròn nội tiếp tại M và N, BN và CM cắt nhau tại I.

Chứng minh DI đi qua trung điểm PQ.

Lời giải. Từ B, D, C kẻ đường thẳng vuông góc EF cắt EF lần lượt tại K, H, G suy ra BH, DH, CG song song suy ra

$\dfrac{KH}{HG} = \dfrac{BD}{DC}$, và $\angle BFK = \angle AFE = \angle AEF$ suy ra tam giác BKH và CGE đồng dạng



, ta có $\frac{BH}{CH} = \frac{KH}{GH} = \frac{BD}{CD}$ suy ra HD là phân giác góc $\angle BHC$, ta có $\angle BHD = \angle DHC$, DH vuông góc EF , ta có $\angle BHK = \angle CHQ$.

Tứ giác BPHD và CQHD là các tứ giác nội tiếp , ta có $\angle BDP = \angle BHP = \angle CHQ = \angle CDQ$ suy ra MN song song BC và $DM = DN$, cũng từ đó suy ra tam giác vuông BDP và CDQ đồng dạng , ta có $\angle BDP = \angle CDQ$.

DI cắt MN, PQ tại L và J , ta có $\frac{ML}{LN} = \frac{CD}{BD}$, tính chất tỷ số diện tích hai tam giác suy ra $\frac{dtPDJ}{dtMDL} = \frac{DP.DJ}{DM.DL}$ (1), $\frac{dtDLN}{dtDJQ} = \frac{DL.DN}{DJ.DQ}$ (2),

nhân đẳng thức (1) cho (2) , ta có $\frac{dtPDJ}{dtMDL}\frac{dtDLN}{dtDJQ} = \frac{DP.DJ}{DM.DL}\frac{DL.DN}{DJ.DQ} = \frac{DP}{DQ}$ (3),

Mặt khác $\frac{dtDJQ}{dtDJP} = \frac{QJ}{JP}$ (4), nhân (3) với (4) , ta có $\frac{dtPDJ}{dtMDL}\frac{dtDLN}{dtDJQ}.\frac{dtDJQ}{dtDJP} = \frac{DP}{DQ}.\frac{JQ}{PJ}$, ta có $\frac{dtLDN}{dtLDM} = \frac{DP}{DQ}.\frac{JQ}{PJ}$ (5), mặt khác $\frac{dtLDN}{dtLDM} = \frac{LN}{LM}$ (6), từ (5) và (6), ta có $\frac{LN}{LM} = \frac{DP}{DQ}.\frac{JQ}{PJ}$,

MN song BC , ta có $\frac{LN}{LM} = \frac{BD}{CD}$, ta có $\frac{BD}{CD} = \frac{DP}{DQ}.\frac{JQ}{PJ}$, ta có $\frac{PJ}{JQ} = \frac{DP}{DQ}.\frac{CD}{BD} = 1$, ta có $PJ = JQ$.

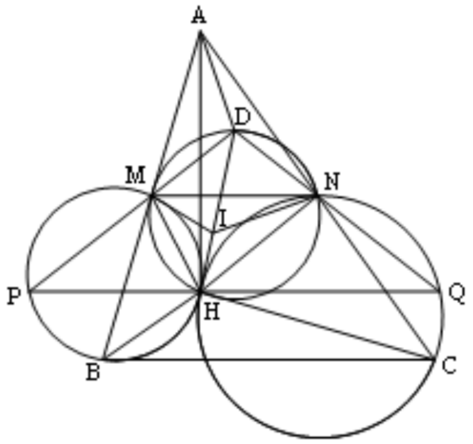
Bài toán 7 (APMO)**.** Cho tam giác ABC, trực tâm H, M và N là trung điểm AB, AC, H nằm trong tứ giác MNCB, thỏa mãn đường tròn ngoại tiếp tam giác HBM, và đường tròn ngoại tiếp tam giác HCN tiếp xúc nhau. Đường thẳng qua H song song BC cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác HBM tại P, đường tròn ngoại tiếp tam giác HCN tại Q, PM cắt QN tại D, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác HMN. Chứng minh $DA = DI$.

Lời giải. Giả thiết H là trực tâm tam giác ABC , ta có $\angle ABH = \angle ACH = 90^0 - \angle BAC$.

Giả thiết đường tròn ngoại tiếp tam giác HBM, đường tròn ngoại tiếp tam giác HCN tiếp xúc nhau tại H suy ra

$\angle MHN = \angle MBH + \angle NCH = 180^0 - 2\angle BAC$;

Tứ giác MHBP và NHCQ nội tiếp , ta có $\angle MBH = \angle MPH = \angle NCH = \angle NQH = 90^0 - \angle BAC$.



Giả thiết M, N là trung điểm AB, AC, PQ song song BC suy ra PQ song song MN suy ra $\angle DPH = \angle DQH$, ta có $\angle DMN = \angle DNM$ suy ra tam giác DMN cân $DM = DN$, ta có $\angle DMN = \angle DNM = 90^0 - \angle BAC$, ta có $\angle MDN = 180^0 - 2\angle DMN = 2\angle BAC$, ta có $\angle MHN + \angle MDN = 180^0 - 2\angle BAC + 2\angle BAC = 180^0$ suy ra tứ giác MDNH nội tiếp , ta có $\angle MHD = \angle DHN$ suy ra HD là phân giác góc $\angle MHN$.

Giả thiết I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MHN suy ra I nằm trên HD theo tính chất của tâm đường tròn nội tiếp , ta có $\angle MIN = 90^0 + \dfrac{1}{2}\angle MHN = 180^0 - \angle BAC$ suy ra tứ giác AMIN nội tiếp và $DM = DN = DI$ suy ra I là tâm đường tròn (AMN) , ta có $DA = DI$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1- Sharygin Geometry Olympiad

2- Iranian Geometry Olympiad (IGO)

3- Moscow Oral Geo 2003-22

4- Asian Pacific Mathematics Olympiad

5- Mathematical Blympiad in China