TOÁN HỌC VIỆT NAM

CÁC ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CỦA THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ SỐ 10 - NĂM 2019

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x}$ và $B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5}\right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ đạt giá trị nguyên lớn nhất.

Bài 2. (2,5 điểm)

1) *Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:*

Hai đội công nhân cùng làm chung một công việc thì sau 15 ngày làm xong. Nếu đội thứ nhất làm riêng trong 3 ngày rồi dừng lại và đội thứ hai làm tiếp công việc đó trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành được 25% công việc. Hỏi nếu mỗi đội làm riêng thì trong bao nhiêu ngày mới xong công việc trên?

2) Một bồn nước inox có dạng một hình trụ với chiều cao 1,75m và diện tích đáy là $0{,}32\text{m}^2$. Hỏi bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước ? (Bỏ qua bề dày của bồn nước).

Bài 3. (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$.

2) Trong mặt phẳng tọa độ 0xy, cho đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$ và parabol $(P): y = x^2$.

a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1x_2} + 1$.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn $(AB < AC)$ nội tiếp đường tròn (O). Hai đường cao BE và CF của tam giác ABC cắt nhau tại điểm H.

a) Chứng minh rằng bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh rằng đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

c) Gọi K là trung điểm của đoạn thẳng BC. Đường thẳng AO cắt đường thẳng BC tại điểm I, đường thẳng EF cắt đường thẳng AH tại điểm P. Chứng minh rằng tam giác APE đồng dạng với tam giác AIB và đường thẳng KH song song với đường thẳng IP.

Bài 5. (0,5 điểm)

Cho biểu thức $P = a^4 + b^4 - ab$, với a, b là các số thực thỏa mãn $a^2 + b^2 + ab = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức P.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài I *(2,0 điểm)*

1 Với $x = 9$

Thay vào A ta có :

$$A = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x} = \frac{4(\sqrt{9}+1)}{25-9} = \frac{4\cdot(3+1)}{16} = 1$$

.

2 Rút gọn biểu thức B.

Với

$$x \geq 0 \quad , x \neq 25, \text{ ta có } B = \left(\frac{15-\sqrt{x}}{x-25} + \frac{2}{\sqrt{x}+5}\right) : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}.$$

$$B = \left[\frac{15-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} + \frac{2}{\sqrt{x}+5}\right] : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}.$$

$$B = \frac{15-\sqrt{x}+2(\sqrt{x}-5)}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}.$$

$$B = \frac{15-\sqrt{x}+2\sqrt{x}-10}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} : \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-5}.$$

$$B = \frac{\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}+5)(\sqrt{x}-5)} \cdot \frac{\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}+1}.$$
$$B = \frac{1}{\sqrt{x}+1}.$$

3) Tìm tất cả giá trị nguyên của x để biêuu thức $P = A \cdot B$ đạt giá giá trị nguyên lớn nhất.

Ta có $P = A \cdot B = \frac{4(\sqrt{x}+1)}{25-x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{4}{25-x}$.

Để P nhận giá trị nguyên khi $x \in \mathbb{Z}$ thì $4 \vdots (25-x)$ hay $25-x \in U_{(4)} = \{-4;-2;-1;1;2;4\}$.

Khi đó, ta có bảng giá trị sau:

$25-x$	-4	-2	-1	1	2	4
x	29	27	26	24	23	21
$P = A.B$	-1	-2	-4	4	2	1
Đánh giá	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn	Thỏa mãn

Do P đạt giá trị nguyên lớn nhất nên ta có $P = 4$. Khi đó giá trị cần tìm của x là $x = 24$.

Bài II. (2,5 điểm)

1.*Giải bài toán bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình*

- Gọi thời gian để đội thứ nhất và đội thứ hai làm riêng một mình hoàn thành xong công việc lần lượt là x và $y (x > 15, y > 15)$, đơn vị (ngày).

Một ngày đội thứ nhất làm được $\frac{1}{x}$ (công việc).

Một ngày đội thứ hai làm được $\frac{1}{y}$ (công việc).

- Vì hai đội cùng làm trong 15 ngày thì hoàn thành xong công việc. Như vậy trong một ngày cả hai đội làm được $\frac{1}{15}$ (công việc). Suy ra, ta có phương trình : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15}$

(1).

- Ba ngày đội đội thứ nhất làm được $\frac{3}{x}$ (công việc).

- Năm ngày đội thứ hai làm được $\frac{5}{y}$ (công việc).

- Vì đội thứ nhất làm trong 3 ngày rồi dừng lại đội thứ hai làm tiếp trong 5 ngày thì cả hai đội hoàn thành xong $25\% = \frac{1}{4}$ (công việc).

Suy ra, ta có phương trình : $\frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4}$

(2).

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{15} \\ \frac{3}{x} + \frac{5}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{40} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 40 \end{cases}$ (TMĐK).

- Vậy thời gian để đội thứ nhất làm riêng một mình hoàn thành xong công việc là 24 (ngày) và thời gian để đội thứ hai làm riêng một mình hoàn thành xong công việc là 40 (ngày).

2) Số mét khối nước đựng được của bồn chính là thể tích của bồn chứa. Như vậy số mét khối đựng được của bồn sẽ là : $V = 0,32.1,75 = 0,56\left(\text{m}^3\right)$.

Bài III(2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x^4 - 7x^2 - 18 = 0(1)$

*- Cách 1:

Đặt $t = x^2 (t \geq 0)(*)$

*Phương trình (1) trở thành : $t^2 - 7t - 18 = 0(2)$

Ta có : $\Delta = (-7)^2 - 4.1.(-18) = 121 = 11^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 11$

Suy ra:Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt là:

$t_1 = \frac{7+11}{2} = 9(t/m)$ và $t_2 = \frac{7-11}{2} = -2(ktm)$

Thay $t = 9$ vào (*) ta có : $x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = \pm 3$

- Cách 2:

Ta có : $x^4 - 7x^2 - 18 = 0$ $\quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + 2 = 0 (vôli) \\ x^2 - 9 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow x^2 = 9$

$\Leftrightarrow x = \pm 3$

$\Leftrightarrow x^4 + 2x^2 - 9x^2 - 18 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x^2 + 2) - 9(x^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (x^2 + 2)(x^2 - 9) = 0$

Vậy nghiệm của phương trình là : $x = \pm 3$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y = 2mx - m^2 + 1$ và parabol $(P): y = x^2$

a) Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 2mx + m^2 - 1 (1)$

Để (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với $\forall m$

Ta có : $\begin{cases} a = 1 \neq 0 \\ \Delta' = (b')^2 - ac > 0 \ \forall m \end{cases}$

Xét $\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = m^2 - m^2 + 1 = 1 > 0, \forall m$

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt

b) Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1 x_2} + 1$ (2)

Ta có $x_1 x_2 \neq 0 \Rightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow m \neq \pm 1$

Hai nghiệm của phương trình : $x_1 = m - 1; x_2 = m + 1$

Biến đổi biểu thức (2) ta có : $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-2}{x_1 x_2} + 1 \Rightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{-2 + x_1 x_2}{x_1 x_2} \Rightarrow x_1 + x_2 = -2 + x_1 x_2$

Thay $x_1 = m - 1; x_2 = m + 1$ vào biểu thức $x_1 + x_2 = -2 + x_1 x_2$ ta có :

$$m - 1 + m + 1 = -2 + (m - 1)(m + 1) \Rightarrow m^2 - 1 - 2 = 2m$$
$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow (m - 3)(m + 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m - 3 = 0 \\ m + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 3 \\ m = -1 (L) \end{array}\right.$$

Kết Luận : Với $m = 3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài IV(3 điểm)

1) Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.

Xét tứ giác $BCEF$ ta có :

$\widehat{BEC} = 90° (BE$ là đường cao $)$

$\widehat{BFC} = 90° (CF$ là đường cao $)$

$\Rightarrow BCEF$ là tứ giác nội tiếp (đỉnh E, F cùng nhìn cạnh BC dưới một góc vuông).

2) Chứng minh đường thẳng OA vuông góc với đường thẳng EF.

Vẽ tiếp tuyến Ax như hình vẽ $\Rightarrow \widehat{BAF} = \widehat{ACB}$ (tính chất giưa đường tiếp tuyến và dây cung).

Do tứ giác $BCEF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$.

Ta suy ra $\widehat{BAF} = \widehat{AFE} \Rightarrow EF // Ax$ (do hai góc so le trong)

Lại có $Ax \perp OA \Rightarrow OA \perp EF$ (đpcm).

3) Chứng minh ΔAPE đồng dạng ΔABI

Ta có : $\widehat{AEB} = \widehat{ABI}\left(V\hat{A}\widehat{EB} + \widehat{EFC} = \widehat{ABI} + \widehat{EFC} = 180°\right)$

Mặt khác $\widehat{APE} + \widehat{PAI} = 90°$ (vì $AI \perp PE$)

$\widehat{AIB} + \widehat{PAI} = 90°(\text{Vi } AH \perp BC) \Rightarrow \widehat{APE} = \widehat{AIB}$
Vậy $\Delta APE \sim \Delta ABI$

Chứng minh $KH//PI$
Gọi M là giao điểm của AO và EF, dung đường kính AS
Ta có $BE//CS$ cùng vuông góc AC
$BS//CF$ cùng vuông góc AB

$\Rightarrow BHCS$ là hình bình hành nên H, K, S thẳng hàng
Ta có $AE \cdot AC = AH \cdot AD$ và $AE \cdot AC = AM \cdot AS$
$\Rightarrow AH \cdot AD = AM \cdot AS \Rightarrow \dfrac{AH}{AS} = \dfrac{AM}{AD} \Rightarrow \Delta\ AHM \sim \Delta\ ASD \Rightarrow \widehat{AHM} = \Delta\ \widehat{ASD}$
$\Rightarrow HMSD$ Nội tiếp đường tròn
Kết hợp $PMID$ nội tiếp đường tròn $\Rightarrow \widehat{PIM} = \widehat{PDM} = \widehat{HSM} \Rightarrow HS//PI$.

Bài V (0,5 điểm)

Ta có $a^2 + b^2 + ab = 3 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 3 - ab$ thay vào P ta được.

$$P = a^4 + b^4 - ab = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2 - ab = (3 - ab)^2 - 2a^2b^2 - ab = 9 - 6ab + a^2b^2 -$$
$$= 9 - 7ab - a^2b^2 = -\left[(ab)^2 + 2 \cdot ab \cdot \frac{7}{2} + \frac{49}{4}\right] + \frac{49}{4} + 9 = -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4}.$$

Vì $a^2 + b^2 = 3 - ab$, mà $(a + b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq -2ab \Rightarrow 3 - ab \geq -2ab \Leftrightarrow$
$ab \geq -3$
Và $(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Rightarrow 3 - ab \geq 2ab \Leftrightarrow ab \leq 1.(2)$
Từ (1) và (2) suy ra $-3 \leq ab \leq 1 \Leftrightarrow -3 + \frac{7}{2} \leq ab + \frac{7}{2} \leq \frac{7}{2} + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq ab + \frac{7}{2} \leq \frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq \left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 \leq \frac{81}{4} \Leftrightarrow -\frac{81}{4} \leq -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 \leq -\frac{1}{4} \Leftrightarrow -\frac{81}{4} + \frac{85}{4} \leq -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4} \leq -$$
$$\Leftrightarrow 1 \leq -\left(ab + \frac{7}{2}\right)^2 + \frac{85}{4} \leq 21$$

Vậy Max $P = 21$. Dấu = xáy ra khi $\begin{cases} ab = -3 \\ a^2 + b^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$ v $\begin{cases} b = \sqrt{3} \\ a = -\sqrt{3} \end{cases}$

Min $P = 1$. Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} ab = 1 \\ a^2 + b^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

==

Chúc các em luyện tập và thi đạt kết quả tốt!