CÁC ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CỦA THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ SỐ 8 - NĂM 2017

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$, với $x \geq 0$; $x \neq 25$.

1) Tính giá trị biểu thức A khi x = 9.

2) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

3) Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B|x-4|$.

Bài 2. (2,0 điểm)

Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một xe ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 120km. Do vận tốc ô tô lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h nên ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Bài 3. (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\sqrt{y-1} = 5 \\ 4\sqrt{x} - \sqrt{y-1} = 2 \end{cases}$

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng (d): y = mx + 5.

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) luôn đi qua điểm A(0;5) với mọi giá trị của m.

b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol (P): $y = x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là x_1; x_2 với ($x_1 < x_2$) sao cho $|x_1| > |x_2|$.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ AB và cung nhỏ BC. Hai dây AN và CM cắt nhau tại I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại H và K.

1) Chứng minh rằng bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.
2) Chứng minh rằng $NB^2 = NK.NM$.
3) Chứng minh rằng tứ giác BHIK là hình thoi.
4) Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK và tam giác MCK và E là trung điểm đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O), Chứng minh rằng ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Bài 5. (0,5 điểm)

Cho các số thực a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$ và $ab + bc + ca = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho hai biểu thức $A = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5}$ và $B = \frac{4}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25}$ với $x \geq 0, x \neq 25$.

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 9$.

b) Chứng minh rằng $B = \frac{1}{\sqrt{x}-5}$.

c) Tìm tất cả các giá trị của x để $A = B \cdot |x-4|$.

Lời giải.

a) Khi $x = 9$ ta có $A = \frac{\sqrt{9}+2}{\sqrt{9}-2} = \frac{3+2}{3-5} = -\frac{5}{2}$

b) Với $x \geq 0, x \neq 25$ thì

$$\begin{aligned} B &= \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{x-25} \\ &= \frac{3}{\sqrt{x}+5} + \frac{20-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\ &= \frac{3(\sqrt{x}-5)+20-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\ &= \frac{3\sqrt{x}-15+20-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\ &= \frac{\sqrt{x}+5}{(\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+5)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}-5} \text{ (điều phải chứng minh)} \end{aligned}$$

c) Với $x \geq 0, x \neq 25$ ta có:

$$A = B \cdot |x - 4|$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-5} = \frac{1}{\sqrt{x}-5} \cdot |x-4|$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 = |x - 4| (*)$$

Nếu $x \geq 4, x \neq 25$ thì $(*)$ trở thành:

$$\sqrt{x} + 2 = x - 4$$
$$\Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 2) = 0$$

Do $\sqrt{x} + 2 > 0$ nên $\sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9$ (thỏa mãn).
Nếu $0 \leq x < 4$ thì $(*)$ trở thành: $\sqrt{x} + 2 = 4 - x$

$$\Leftrightarrow x + \sqrt{x} - 2 = 0$$
$$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 2) = 0$$

Do $\sqrt{x} + 2 > 0$ nên $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (thỏa mãn).
Vậy có hai giá trị $x = 1$ và $x = 9$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Một xe ô tô và một xe máy cùng khởi hành từ A để đi đến B với vận tốc của mỗi xe không đổi trên toàn bộ quãng đường AB dài 120 km. Do vận tốc xe ồ tô lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h nền xe ô tô đến B sớm hơn xe máy 36 phút. Tính vận tốc của mỗi xe.

Lời giải

Gọi vận tốc xe máy là x km/h. Điều kiện $x > 0$.
Do vận tốc xe ō tô lớn hơn vận tốc xe máy là 10 km/h. nên vận tốc ô tō là $x + 10$ km/h.
Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{120}{x}$ h.
Thời gian xe máy đi từ A đến B là $\frac{120}{x+10}$ h.
Xe ô tō đến B sớm hơn xe máy 36 phút $= \frac{3}{5}$ h nên ta có phương trình:

$$\frac{120}{x} - \frac{120}{x+10} = \frac{3}{5}$$
$$\Leftrightarrow 120.5 \cdot (x + 10) - 120.5 \cdot x - 3x \cdot (x + 10)$$
$$\Leftrightarrow 3x^2 + 30x - 6000 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x + 50)(x - 40) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -50 \\ x = 40. \end{array}\right.$$ Kết hợp với điều kiện đầu bài ta được $x = 40$.

Vậy vận tốc của xe máy là 40 km/h, vận tốc của ô tô là 50 km/h.

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}=5\\ 4\sqrt{x}-\sqrt{y-1}=2\end{cases}$.

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường thẳng $(d): y=mx+5$.

(a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(0;5)$ với mọi giá trị của m.

(b) Tìm tất cả các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt parabol $(P): y=x^2$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1, x_2($ với $x_1<x_2)$ sao cho $|x_1|>|x_2|$.

Lời giải.

1) Giải hệ $\begin{cases}\sqrt{x}+2\sqrt{y-1}=5\\ 4\sqrt{x}-\sqrt{y-1}=2\end{cases}$.

Điều kiện: $x\ge 0, y\ge 1$.

Đặt $\begin{cases}a=\sqrt{x}\\ b=\sqrt{y-1}\end{cases}$. Điều kiện $a;b\ge 0$. Khi đó hệ phương trình ban đầu trở thành

$$\begin{cases}a+2b=5\\ 4a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5-2b\\ 4(5-2b)-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5-2b\\ -9b=-18\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}.$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm là $(x;y)=(1;5)$.

2)

(a) Chứng minh đường thẳng (d) luôn đi qua điểm $A(0;5)$ với mọi giá trị của m.

Thay tọa độ điểm $A(0;5)$ vào phương trình đường thẳng $(d): y=mx+5$ ta được: $5=m.0+5$ luôn đúng với mọi giá trị của tham số m nên đường thẳng (d) luôn đi qua điểm A với mọi giá trị của m.

(b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) :

$$x^2=mx+5\Leftrightarrow x^2-mx-5=0$$

Ta có tích hệ số $ac=-5<0$ nên phương trình hoành độ giao điểm luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m hay đường thẳng (d) cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m. Theo hệ thức Vi-ét ta có:

$$\begin{cases}x_1+x_2=m\\ x_1x_2=-5\end{cases}$$

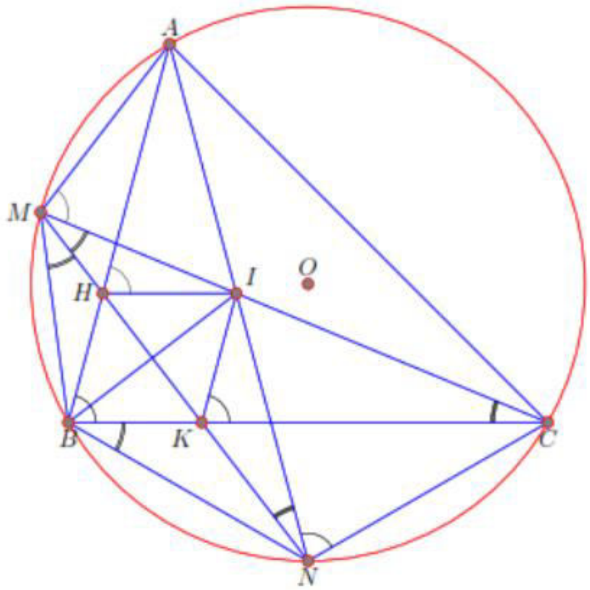
Ta có: $|x_1|>|x_2|\Leftrightarrow x_1^2>x_2^2\Leftrightarrow x_1^2-x_2^2>0\Rightarrow(x_1+x_2)(x_1-x_2)>0$

Theo giả thiết: $x_1<x_2\Leftrightarrow x_1-x_2<0$ do đó $x_1+x_2<0\Leftrightarrow m<0$.

Vậy $m<0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC. Gọi M và N lần lượt là điểm chính giữa của cung nhỏ $\widehat{AB}$ và cung nhỏ $\widehat{BC}$. Hai dãy AN và CM cắt nhau tại điểm I. Dây MN cắt các cạnh AB và BC lần lượt tại các điểm H và K.
a) Chứng minh các điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn.
b) Chứng minh $NB^2 = NK \cdot MN$.
c) Chứng minh tứ giác $BHIK$ là hình thoi.
d) Gọi P, Q lần lượt là tâm của các đường tròn ngoại tiếp tam giác MBK, tam giác MCK và E là trung điểm của đoạn PQ. Vẽ đường kính ND của đường tròn (O). Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh bốn điểm C, N, K, I cùng thuộc một đường tròn. Ta có M là điểm chính giữa cung $AB \Rightarrow . I = BM \Rightarrow \widehat{MNA} = \widehat{MCB} \Rightarrow \widehat{KNI} = \widehat{ICK}$. Tứ giác $\widehat{CNKI}$ có C và N là hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh KI dưới hai góc bằng nhau nên $CNKI$ nội tiếp (dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp).
Do đó bốn điểm C, N, I, K cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh $NB^2 = NK.MN$.
Ta có N là điểm chính giữa cung $BC \Rightarrow \widehat{BN} = \widehat{CN} \Rightarrow \widehat{BMN} = \widehat{CMN}$ (góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau)

Mà $\widehat{CBN} = \widehat{CMN}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{CN}$)

$$\Rightarrow \widehat{CBN} = \widehat{BMN} \text{ (cùng bằng góc } \widehat{CNN} \text{) } \Rightarrow \widehat{KBN} = \widehat{BMN}$$

Xét $\triangle KBN$ và $\triangle BMN$ có: $\begin{cases} \widehat{N} \text{ chung} \\ \widehat{KBN} = \widehat{BMN} \end{cases}$

$$\Rightarrow \triangle KBN \sim \triangle BMN \Rightarrow \frac{KN}{BN} = \frac{BN}{MN} \Rightarrow NB^2 = NK.NM \text{ (điều phải chứng minh).}$$

c) Chứng minh tứ giác BHIK là hình thoi.
Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{ANC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$)
Mà $\widehat{AMC} = \widehat{AHI}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{IC}$)
$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{IKC}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $HB//IK(1)$.
Chứng minh tương tự phần 1 ta có tứ giác $AMHI$ nội tiếp
$\Rightarrow \widehat{ANC} = \widehat{IKC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AI}$)
Ta có $\widehat{ABC} = \widehat{AMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{AC}$)

$\Rightarrow \widehat{ABC} = \widehat{AHI}$ mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $BK//HI$ (2)
Từ (1) và (2) suy ra tứ giác $BHIK$ là hình bình hành.
Mặt khác AN, CM lần lượt là các tia phân giác của các góc A và C trong tam giác ABC nên I là giao điểm ba đường phân giác, do đó BI là tia phân giác của góc B.
Vậy tứ giác BHIK là hình thoi (dấu hiệu nhận biết hình thoi).

d) Chứng minh ba điểm D, E, K thẳng hàng.
Vì N là điểm chính giữa cung nhỏ $\widehat{BC}$ nên DN là trung trực của $BC \Rightarrow DN$ là phân giác $\widehat{BDC}$. Ta có $\widehat{KQC} = 2\widehat{KMC}$ (góc nội tiếp bằng nữa góc ở tâm của đường tròn (Q))
Lại có $\widehat{NDC} = \widehat{KMC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{BC}$)
Mà $\widehat{BDC} = 2\widehat{NDC} \Rightarrow \widehat{KQC} = \widehat{BDC}$
Xét tam giác $\triangle BDC$ và $\triangle KQC$ là các tam giác cân tại D và Q có hai góc $\widehat{BCD} = \widehat{BCQ}$ do vậy D, Q, C thẳng hàng nên $KQ//PK$
Chứng minh tương tự ta có ta có D, P, B thẳng hàng và $DQ//PK$
Do đó tứ giác $PDQK$ là hình bình hành nên E là trung điểm của PQ cũng là trung điểm của DK. Vậy D, E, K thẳng hàng (điều phải chứng minh).

Câu 5. Cho các số thực a, b, c thay đổi luôn thỏa mãn: $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ và $ab + bc + ca = 9$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2 + c^2$
Lời giải.
Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương ta có:

$$a^2 + b^2 \geq 2ab, b^2 + c^2 \geq 2bc, c^2 + a^2 \geq 2ca.$$

Do đó: $2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) = 2.9 = 18 \Rightarrow 2P \geq 18 \Rightarrow P \geq 9$
Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \sqrt{3}$.
Vậy $\min P = 9$ khi $a = b = c = \sqrt{3}$.
Vì $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$ nên $(a-1)(b-1) \geq 0 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 \geq 0 \Leftrightarrow ab + 1 \geq a + b$
Tương tự ta có $bc + 1 \geq b + c, ca + 1 \geq c + a$
Do đó $ab + bc + ca + 3 \geq 2(a + b + c) \Leftrightarrow a + b + c \leq \frac{9+3}{2} = 6$

Mà $P = a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2 - 18 \Rightarrow P \leq$ $36 - 18 = 18$. Dấu bằng xãy ra khi: $\left[\begin{array}{l} a = 4; b = c = 1 \\ b = 4; a = c = 1 \\ c = 4; a = b = 1 \end{array}\right.$ Vạy $\max P = 18$ khi $\left[\begin{array}{l} a = 4; b = c = 1 \\ b = 4; a = c = 1 \\ c = 4; a = b = 1 \end{array}\right.$.

==

Chúc các em luyện tập và thi đạt kết quả tốt!