VIỆT NAM TOÁN HỌC

CÁC ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CỦA THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ SỐ 7 - NĂM 2016

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x \geq 0; x \neq 9$.

1) Tính giá trị biểu thức A khi x = 25.
2) Chứng minh rằng $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.
3) Tìm x để biểu thức P = A.B có giá trị là số nguyên.

Bài 2. (2,0 điểm)

Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 720m^2. Nếu tăng chiều dài thêm 10m và giảm chiều rộng 6m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Bài 3. (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} \frac{3x}{x-1} - \frac{2}{y+2} = 4 \\ \frac{2x}{x-1} + \frac{1}{y+2} = 5 \end{cases}$
2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng (d): $y = 3x + m^2 - 1$ và parabol (P): $y = x^2$.
   a) Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.
   b) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm m để $(x_1 + 1)(x_2 + 1) = 1$

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn tâm (O) và một điểm a nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (AB là tiếp tuyến) và đường kính BC. Trên đường thẳng CO lấy điểm I (I khác C, I khác O). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D và E (D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn DE.

a) Chứng minh rằng bốn điểm A,B,O,H cùng nằm trên một đường tròn.
b) Chứng minh rằng $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$.
c) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh rằng HK // DC.
d) Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh rằng tứ giác BECF là hình chữ nhật.

Bài 5. (0,5 điểm)

Với các số thực x, y thỏa mãn $x - \sqrt{x+6} = \sqrt{y+6} - y$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của P = x + y.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho hai biểu thức $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8}$ và $B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9}$ với $x \geq 0, x \neq 9$.

a) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 25$.

b) Chứng minh $B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3}$.

c) Tìm x để biểu thức $P = A \cdot B$ có giá trị nguyên.

Lời giải.

a) Với $x = 25$ (thỏa mãn $x \geq 0, x \neq 9$) Ta có $A = \frac{7}{\sqrt{x}+8} = \frac{7}{\sqrt{25}+8} = \frac{7}{13}$.

b) Với $x \geq 0, x \neq 9$ ta có

$$\begin{aligned} B &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-3} + \frac{2\sqrt{x}-24}{x-9} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) + 2\sqrt{x} - 24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \\ &= \frac{x + 5\sqrt{x} - 24}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+8)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

c)Ta có $P = A \cdot B = \frac{\sqrt{x}+8}{\sqrt{x}+3} \cdot \frac{7}{\sqrt{x}+8} = \frac{7}{\sqrt{x}+3} > 0 \Rightarrow P = \frac{7}{\sqrt{x}+3} \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{7}{P} - 3 \geq 0 \Rightarrow \frac{7}{P} \geq 3 \Rightarrow$

$P \leq 2 \Rightarrow$ mà $\begin{cases} P \in \mathbb{Z}^+ \\ P > 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} P = 1 \\ P = 2 \end{array}\right.$

Với $P = 1 \Rightarrow x = 16$.

Với $P = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{4}$.

Câu 2. Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:
Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích 720 m^2. Nếu tăng chiều dài thêm 10 m và giảm chiều rộng 6 m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính chiều dài và chiều rộng của mảnh vườn.

Lời giải.

Gọi chiều dài hình chữ nhật là: $x(\text{ m})(x>0)$.

Suy ra, chiều rộng hình chữ nhật là: $\frac{720}{x}(\text{ m})$.

Theo bài ra, ta có phương trình:

$$(x+10)\left(\frac{720}{x}-6\right)=720 \Leftrightarrow 6x^2+60x-7200=0 \Leftrightarrow x^2+10x-1200=0$$

Giải phương trình này ta được:

Vậy chiều dài hình chữ nhật là $30(\text{ m})$, chiều rộng hình chừ nhật là $24(\text{ m})$.

Câu 3.

a) Giải hệ phương trình $\begin{cases}\frac{3x}{x-1}-\frac{2}{y+2}=4\\ \frac{2x}{x-1}+\frac{1}{y+2}=5\end{cases}$

b) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): y=3x+m^2-1$ và parabol $(P): y=x^2$.

(a) Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

(b) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ các giao điểm của (d) và (P). Tìm m để $(x_1+1)(x_2+1)=1$.

Lời giải.

a) Đặt $\begin{cases}u=\frac{x}{x-1}\\ v=\frac{1}{y+2}\end{cases}$ với $(x\neq 1, y\neq -2)$

Khi đó hệ phương trình trở thành: $\begin{cases}3u-2v=4\\ 2u+v=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u=2\\ v=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{x}{x-1}=2\\ \frac{1}{y+2}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=-1\end{cases}$

(thõa mãn)

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(2;-1)$.

b)

(a) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và parabol (P) là:

$$x^2=3x+m^2-1 \Leftrightarrow x^2-3x-m^2+1=0$$

Ta xét biệt thức $\Delta=(-3)^2-4.(-m^2+1)=9+4m^2-4=4m^2+5>0$ với mọi m.

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi m.

(b) Với x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) nên $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình (1). Theo định lí vi-ét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 \cdot x_2 = 1 - m^2 \end{cases}$

Để $(x_1+1)(x_2+1) = 1 \Leftrightarrow x_1 \cdot x_2 + x_1 + x_2 = 1 \Leftrightarrow 1 - m^2 + 3 + 1 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Câu 4. Cho đường tròn (O) và một điểm A nằm ngoài đường tròn. Kẻ tiếp tuyến AB với đường tròn (O) (B là tiếp điểm) và đường kính BC. Trên đoạn thẳng CO lấy điểm I(I khác C, I khác O). Đường thẳng AI cắt (O) tại hai điểm D và E(D nằm giữa A và E). Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng DE.

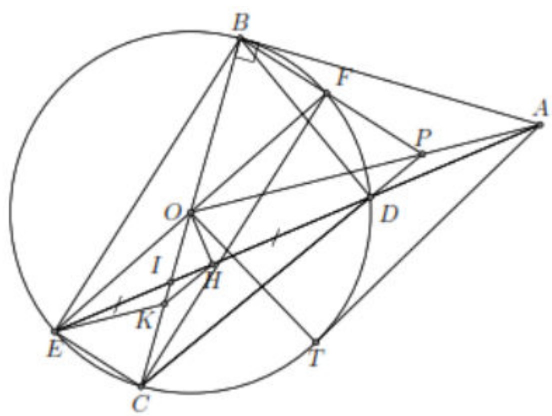
a) Chứng minh bốn điểm A, B, O, H cùng nằm trên một đường tròn.

b) Chứng minh $\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$.

c) Đường thẳng d đi qua điểm E song song với AO, d cắt BC tại điểm K. Chứng minh $HK // DC$.

d) Tia CD cắt AO tại điểm P, tia EO cắt BP tại điểm F. Chứng minh tứ giác $BECF$ là hình chữ nhạt.

Lời giải.



a) Vì AB là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow OA \perp AB \Rightarrow \widehat{OBA} = 90^\circ$.

Vì DE là dây cung của (O) mà H là trung điểm của DE nên $OH \perp DE \Rightarrow \widehat{OHA} = 90^\circ$.

Xét tứ giác $ABOH$ có $\widehat{OHA} + \widehat{OBA} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác $ABOH$ nội tiếp.

b) Vi AB là tiếp tuyến của (O) tại $B \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{BED} = \widehat{BEA}$ (góc tạo bởi tiếp tuyến và dãy cung và góc nội tiếp cùng chắn cung BD)

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AEB$ có $\widehat{ABD} = \widehat{BEA}$ và $\widehat{BAD}$ chung $\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle AEB(\text{g} - \text{g}) \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BD}{BE}$.

c) Vì tứ giác $ABOH$ nội tiếp nên $\widehat{HAO} = \widehat{HBO}$ (hai góc cùng chắn một cung)

(1)

Mà $EK//AO \Rightarrow \widehat{KEA} = \widehat{HAO}$ (hai góc so le trong)
(2)
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{KEH} = \widehat{KBH}$.
(3)
$\Rightarrow$ tứ giác $HKEB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EHK} = \widehat{KBE}$
Vì tứ giác $DCEB$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{CDE} = \widehat{CBE}$ (hai góc cùng chắn cung CE)
Từ (3) và (4) ta có $\widehat{CDE} = \widehat{KHE}$ mà hai góc nằm ở vị trí đồng vị $\Rightarrow HK//DC$.

d) Kẻ tiếp tuyến thứ hai với AT với $(O)(T \in (O))$.

$$\Rightarrow OT \perp TA \Rightarrow \widehat{OTA} = 90^\circ.$$

Xét tứ giác $OTAB$ có $\widehat{OTA} + \widehat{OBA} = 180^\circ$ mà hai góc đối nhau $\Rightarrow$ tứ giác $OTAB$ nội tiếp
$\Rightarrow \widehat{OAT} = \widehat{OBT}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung OT)
Mà trền (O) có $\widehat{OBT} = \widehat{CBT} = \widehat{CDT}$ (góc nọi tiểp cùng chắn cung CT)
$\Rightarrow \widehat{OAT} = \widehat{CDT}$ hay $\widehat{PAT} = \widehat{CDT} == \Rightarrow \widehat{PAT} + \widehat{PDT} = 180^\circ$.
Mà hai góc ở vị trí đối nhau trong tứ giác $TAPD \Rightarrow TAPD$ nội tiếp.
$\Rightarrow \widehat{ATP} = \widehat{ADP}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AP)
Trên (O) có $\widehat{EBC} = \widehat{EDC}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CE)
Mà $\widehat{ADP} = \widehat{EDC}$ (hai góc đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{ATP} = \widehat{CBE}$ (1).
Có AT, AB là tiếp tuyến của $(O) \Rightarrow AO$ là tia phân giác của góc $\widehat{TAB} \Rightarrow \widehat{TAP} = \widehat{BAP}$
Xét $\triangle TAP$ và $\triangle BAP$ có $AT = AB, \widehat{TAP} = \widehat{BAP}$ (cmt) và AP chung

$\Rightarrow \triangle TAP = \triangle BAP (\mathrm{c} \cdot \mathrm{g} \cdot \mathrm{c}) \Rightarrow \widehat{ATP} = \widehat{ABP} (2)$
Từ (1) và (2) $\Rightarrow \widehat{ABP} = \widehat{EBC}$
$\Rightarrow \widehat{EBP} = \widehat{EBC} + \widehat{CBP} = \widehat{ABP} + \widehat{CBP} = \widehat{CBA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EBF} = 90^\circ$
Mà EF qua O nên EF là đường kính của $(O) \Rightarrow BFCE$ có hai đường chéo EF và BC bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên nó là hình chữ nhật.

Câu 5. Với các số thực x, y thỏa mãn $x - \sqrt{x+6} = \sqrt{y+6} - y$, tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thuíc $P = x + y$.
Lời giải.
Bổ đề $\sqrt{a} + \sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}, \forall a, b \ge 0$.
Thật vậy bổ đề tương đương voii $2\sqrt{ab} \le a + b$ (đúng theo bất đẳng thức cō-si)
Áp dụng ta có $x - \sqrt{x+6} = \sqrt{y+6} - y \Leftrightarrow x + y = \sqrt{x+6} + \sqrt{y+6} \le \sqrt{2(x+y+12)}$
$\Leftrightarrow (x+y)^2 \le 2(x+y) + 24 \Leftrightarrow -4 \le x + y \le 6 (1)$
Dẻ thấy $x + y \ge 0 (2)$
Ta có $x + y = \sqrt{x+6} + \sqrt{y+6} \Leftrightarrow (x+y)^2 = (x+y) + 12 + 2\sqrt{(x+6)(y+6)} \Leftrightarrow$

$(x+y)^2-(x+y)-12=2\sqrt{(x+6)(y+6)}\geq 0 \Leftrightarrow (x+y+3)(x+y-4)\geq 0 \Leftrightarrow$
$\left[\begin{array}{l} x+y\leq 3 \\ x+y\geq 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow x+y\geq 4(3)$

Từ (1), (2) và (3) suy ra $4\leq x+y\leq 6$.

Dáu " = " xảy ra khi $x+y=4 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=4 \\ \left[x+6=0\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} x=-6 \\ y=10 \end{array}\right. \\ \left\{\begin{array}{l} x=6 \\ x+10 \end{array}\right. \\ y=-6 \\ y=-6 \end{array}\right.$

Khi $x+y=6 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x+y=6 \\ x+6=y+6 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=y=3$.

Vậy giá trị lớn nhất của $x+y$ là 6 khi $x=y=3$ và giá trị nhỏ nhất của $x+y$ là 4 khì $(x;y)=(-6;10)$ hoăcc $(x;y)=(10;-6)$.

===

Chúc các em luyện tập và thi đạt kết quả tốt!