CÁC ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CỦA THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ SỐ 6 - NĂM 2015

Thời gian làm bài: 120 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

1) Tính giá trị của biểu thức A khi x = 9.
2) Rút gọn biểu thức Q.
3) Tìm tất cả các giá trị của x để $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 2. (2,0 điểm)

Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60km, sau đó xuôi dòng 48km trên cùng một dòng song có vận tốc của dòng nước là 2km/giờ. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

Bài 3. (2,0 điểm)

1) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x+y) + \sqrt{x+1} = 4 \\ (x+y) - 3\sqrt{x+1} = -5 \end{cases}$.
2) Cho phương trình $x^2 - (m+5)x + 3m + 6 = 0$ (x là ẩn số).
   a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực m.
   b) Tìm m để phương có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5.

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho đường tròn tâm O có đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn thẳng AO (C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kỳ trên cung KB (M khác K, M khác B). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường trọn tại điểm thứ hai N.

1) Chứng minh rằng tứ giác ACMD là tứ giác nội tiếp.
2) Chứng minh rằng CA.CB = CH.CD.
3) Chứng minh rằng 3 điểm A,N,D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của nửa đường tròn đi qua trung điểm DH.
4) Khi M di động trên cung KB, Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 5. (0,5 điểm)

Với hai số thực không âm a,b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$.

Tìm GTLN của biểu thức $M = \frac{ab}{a+b+2}$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Cho hai biểu thức $P = \frac{x+3}{\sqrt{x}-2}$ và $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

a) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 9$.

b) Rút gọn biểu thức Q.

c) Tìm giá trị của x để $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

a) Tính giá trị của biểu thức P khi $x = 9$

Thay $x = 9$ vào $P = \frac{9+3}{\sqrt{9}-2} = \frac{12}{\sqrt{9}-2} = \frac{12}{3-2} = 12$.

b) Rút gọn biểu thức Q

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} + \frac{5\sqrt{x}-2}{x-4} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2) + 5\sqrt{x}-2}{x-4} \\ &= \frac{x+2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-2}. \end{aligned}$$

c)Tìm giá trị của x để $\frac{P}{Q}$ đạt giá trị nhỏ nhất

Ta có $\frac{P}{Q} = \frac{x+3}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$

Theo bất đẳng thức Cô-si, ta có $\sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} \geq 2\sqrt{3}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{x} = \frac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow x = 3$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\frac{P}{Q}$ là $2\sqrt{3}$, đạt được khi $x = 3$.

Câu 2. Giải bài toán sau bằng cách lạp phương trình hoạc hệ phương trình:
Một tàu tuần tra chạy ngược dòng 60 km, sau đó chạy xuôi dòng 48 km trên cùng một dòng sồng có vãn tốc của dòng nước là 2 km/ giờ. Tính vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng, biết thời gian xuôi dòng ít hơn thời gian ngược dòng 1 giờ.

Lời giải.

Gọi vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng là x(km/ giờ), $x > 2$.

Thời gian tàu tuần tra ngược dòng là $\frac{60}{x-2}$ (giờ).

Thời gian tàu tuần tra xuôi dòng là $\frac{48}{x+2}$ (giờ).

Ta có phương trình $\frac{60}{x-2} - \frac{48}{x+2} = 1 \Rightarrow x^2 - 12x - 220 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 22 \text{ (thõa mãn)} \\ x = -10 \text{ (loai).} \end{array}\right.$

Vạy vận tốc của tàu tuần tra khi nước yên lặng là 22 km/ giờ.

Câu 3.

1)Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2(x+y) + \sqrt{x+1} = 4 \\ (x+y) - 3\sqrt{x+1} = -5. \end{cases}$

Lời giải.

- Điều kiện xác định $x \geq -1$.
- Đạt $\begin{cases} a = x+y \\ b = \sqrt{x+1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = 4 \\ a - 3b = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2. \end{cases}$

- Từ đó ta có $\begin{cases} x + y = 1 \\ \sqrt{x+1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ thỏa mãn điều kiện xác định.
- Vậy hệ phương trình có nghiệm $(3; -2)$.

  2) Cho phương trình $x^2 - (m+5)x + 3m + 6 = 0$($x$ là ẩn số).

  a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực m.

  b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5 .

Lời giải.

a) Chứng minh phương trình luôn có nghiệm với mọi số thực m

Ta có $\Delta = (m+5)^2 - 4(3m+6) = (m-1)^2 \geq 0\ \forall m \in \mathbb{R}$ nên phương trình luôn có nghiệm với mọi giá trị của m.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 là độ dài hai cạnh góc vuông của một tam giác vuông có độ dài cạnh huyền bằng 5

Ta tính được hai nghiệm là $x_1 = 3, x_2 = m+2$.

Theo yêu cầu bài toán ta cần có $\begin{cases} x_1 = 3 > 0 \\ x_2 = m+2 > 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 25 \end{cases}$

Giải điều kiện trên ta được $m = 2$, (chọn) hoặc $m = -6$ (loại).

Vậy $m = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 4. Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính AB. Lấy điểm C trên đoạn AO(C khác A, C khác O). Đường thẳng đi qua C và vuông góc vơi AB cắt nửa đường tròn tại K. Gọi M là điểm bất kì trên cung KB (M khác K. M khác B). Đường thẳng CK cắt các đường thẳng AM, BM lần lượt tại H và D. Đường thẳng BH cắt nửa đường tròn tại điểm thứ hai N.

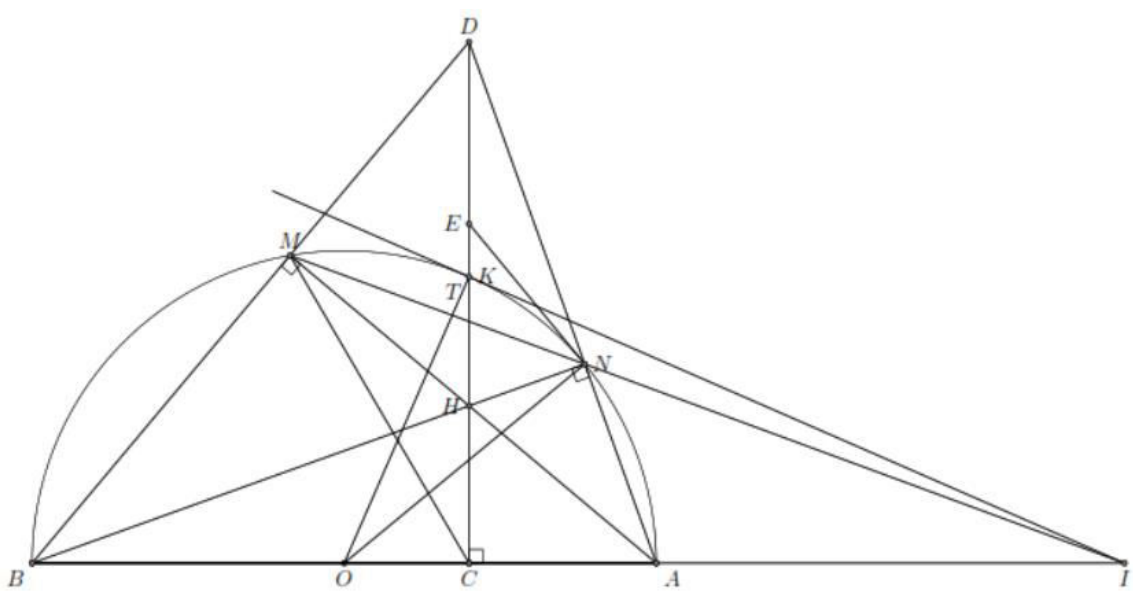
a) Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $CA \cdot CB = CH \cdot CD$.

c) Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng và tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua trung điểm của DH.

d) Khi M di động trên cung KB, chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) Chứng minh tứ giác $ACMD$ là tứ giác nội tiếp.

Ta có $\widehat{AMD} = 90^\circ$ vì góc $\widehat{AMB}$ nhìn nửa đường tròn đường kính AB.

$\widehat{ACD} = 90^\circ$ do $DK \perp AB$.

Suy ra $\widehat{AMD} = \widehat{ACD} = 90^\circ$ nên tứ giác $ACMD$ nội tiếp đường tròn đường kính AD.

b) Chứng minh $CA \cdot CB = CH \cdot CD$.

Xét hai tam giác $\triangle CAH$ và $\triangle CDB$ ta có :

$\widehat{ACH} = \widehat{DCB} = 90^\circ$ Mặt khác $\widehat{CAH} = \widehat{CDB}$ vì cùng phụ góc $\widehat{CBM}$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle CAH \backsim \triangle CDB$

$\Rightarrow \frac{CA}{CD} = \frac{CH}{CB} \Rightarrow CA \cdot CB = CH \cdot CD$, (điều phải chứng minh).

c) Chứng minh ba điểm A, N, D thẳng hàng

Ta có H là trực tâm $\triangle ABD \Rightarrow AD \perp BH$.

Vi $AN \perp BH$ và $AD \perp BH$ nền A, N, D thẳng hàng.

Chứng minh tiếp tuyến tại N của đường tròn đi qua trung điểm của DH.

Gọi E là giao điểm của CK và tiếp tuyến tại N.

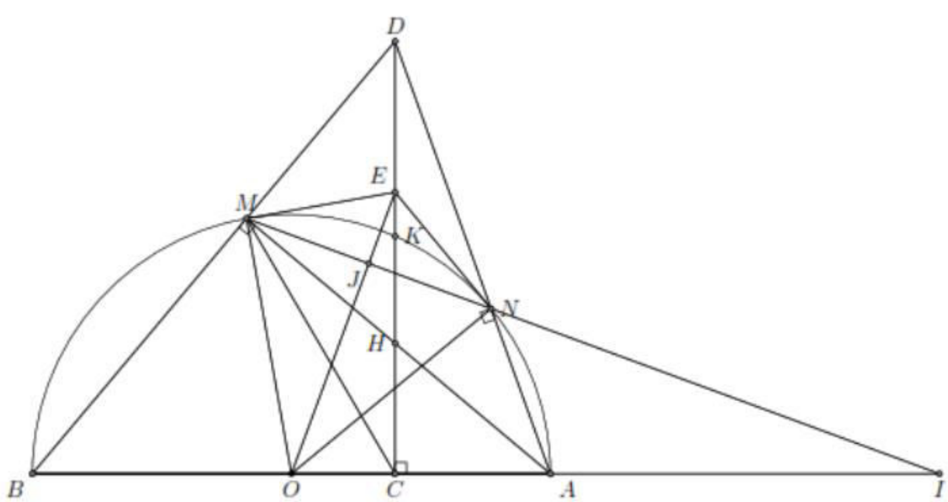
Ta có $BN \perp DN$ và $ON \perp EN \Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{BNO}$.

Mà $\widehat{BNO} = \widehat{OBN}, \widehat{OBN} = \widehat{EDN} \Rightarrow \widehat{DNE} = \widehat{EDN}$.

$\Rightarrow \triangle DEN$ cân tại E, suy ra $ED = EN$.

Ta có $\widehat{ENH} = 90^\circ - \widehat{END} = 90^\circ - \widehat{NDH} = \widehat{EHN}$.

$\Rightarrow \triangle HEN$ cân tại E, suy ra $EH = EN$. Từ (3) và (4) suy ra E là trung điểm của HD, (điều phải chứng minh).



d) Khi M di động trên cung KB, chứng minh đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định. Kéo dài MN cắt AB tại điểm I, ta cần chứng minh điểm I cố định.

Ta xét $\triangle DMH$ vuông tại H có E là trung điểm cạnh huyền DH, suy ra $ME = EN = \frac{1}{2}DH$, xét hai tam giác $\triangle EMO$ và $\triangle ENO$ là hai tam giác bằng nhau theo trường hợp C-C-C. Suy ra $\widehat{EMO} = \widehat{ENO} = 90^\circ \Rightarrow EM \perp OM$.

Suy ra tứ giác $EMON$ nội tiếp đường tròn đường kính $OE \Rightarrow OJ \cdot OE = OM^2 = R^2$.

Ta có $\triangle OJI \sim \triangle OCE \Rightarrow \frac{OJ}{OC} = \frac{OI}{OE} \Rightarrow OI \cdot OC = OJ \cdot OE = R^2$.

Suy ra $OI = \frac{R^2}{OC}$ là số không đổi mà O và đường thẳng AB cố định, suy ra I cố định, (điều phải chứng minh).

Câu 5. Với hai số thực không âm a, b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 4$, tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $M = \frac{ab}{a+b+2}$.

Lời giải.

Ta có $a^2 + b^2 = 4 \Rightarrow 2ab = (a+b)^2 - 4$

$\Rightarrow 2M = \frac{(a+b)^2-4}{a+b+2} = a + b - 2$.

Ta có $a + b \le \sqrt{2(a^2+b^2)} = 2\sqrt{2} \Rightarrow M \le \sqrt{2} - 1$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b = \sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của M bằng $\sqrt{2}$ khi $a = b = \sqrt{2}$.

===

Chúc các em luyện tập và thi đạt kết quả tốt!