CÁC ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CỦA THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ SỐ 17 - NĂM 2012

Môn: Toán Chuyên - Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. (2 điểm)

1) Chứng minh với mọi số nguyên n thì $n^5 + 5n^3 - 6n$ chia hết cho 30

2) Cho số tự nhiên n thỏa mãn n(n + 1) + 6 không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $2n^2 + n + 8$ không phải là số phương.

Bài 2. (2 điểm)

1) Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x - 2y - \frac{2}{x} + 1 = 0 \\ x^2 - 4xy + 4y^2 - \frac{4}{x^2} + 1 = 0 \end{cases}$

2) Cho số thực x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 2012$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = 2xy - yz - zx$.

Bài 3. (3 điểm)

Cho đường tròn (O, R) và dây cung BC cố định (BC < 2R). Một điểm A di động đường tròn (O, R) cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi AD là đường cao và H là trực tâm tam giác ABC.

1) Đường thẳng chứa phân giác ngoài của góc BHC cắt AB, AC lần lượt tại M, N. Chứng minh tam giác AMN là tam giác cân.

2) Gọi E, F hình chiếu của D lên BH, CH. Chứng minh OA vuông góc với EF.

3) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong của góc BAC tại K. Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4. (1 điểm)

Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn (x + 1)(y + z) = xyz + 2

Bài 5. (1 điểm)

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính R = 2cm. Chứng minh rằng trong số 17 điểm A_1, A_2, …, A_{17} bất kỳ nằm trong tứ giác ABCD luôn có thể tìm được 2 điểm mà khoảng cách giữa 2 điểm đó không lớn 1cm.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Chứng minh rằng với mọi số nguyên n thì n^5+5n^3-6n chia hết cho 30.

Lời giải.

Ta có: $A=n^5+5n^3-6n=n(n^4+5n^2-6)=n(n^2-1)(n^2+1)(n^2+6)$

Dễ thấy $(n-1)n.(n+1)\vdots 6$

Ta sẽ chứng minh $A\vdots 5$.

Thật vậy

- Nếu $n=5k$ thì $A\vdots 5$.
- Nếu $n=5k+1$ thì $(n-1)\vdots 5\Rightarrow A\vdots 5$.
- Nếu $n=5k+2$ hoặc $n=5k+3$ thì $(n^2+6)\vdots 5\Rightarrow A\vdots 5$.
- Nếu $n=5k+4$ thì $(n+1)\vdots 5\Rightarrow A\vdots 5$.

Vậy $A=n^5+5n^3-6n\vdots 30$.

Câu 2. Cho số tự nhiên n thỏa mãn $n(n+1)+6$ không chia hết cho 3. Chứng minh rằng $2n^2+n+8$ không phải là số chính phương.

Lời giải.

Ta có $n(n+1)+6$ không chia hết cho 3 nên $n(n+1)$ không chia hết cho 3 $\Rightarrow n=1(\mod 3)\Rightarrow$ $2n^2+n+8=2(\mod 3)$. Vậy $2n^2+n+8$ không phải là một số chính phương.

Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x-2y-\dfrac{2}{x}+1=0 \\ x^2-4xy+4y^2-\dfrac{4}{x^2}+1=0 \end{cases}$.

Lời giải.

Ta có $\begin{cases} x-2y-\dfrac{2}{x}+1=0 \\ x^2-4xy+4y^2-\dfrac{4}{x^2}+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y-\dfrac{2}{x}+1=0 \\ (x-2y)^2-(\dfrac{2}{x})^2+1=0. \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} a=x-2y \\ b=\dfrac{2}{x} \end{cases}$

Khi đó, hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} a-b+1=0 \\ a^2-b^2+1=0 \end{cases} \Rightarrow (b-1)^2-b^2+1=0$

$\Leftrightarrow -2b+2=0 \Leftrightarrow b=1 \Rightarrow a=0$

Do đó: $\begin{cases} x-2y=0 \\ \dfrac{2}{x}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1. \end{cases}$

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm $(2;1)$.

Câu 4. Cho các số thực x,y,z thỏa mãn: $x^2+y^2+z^2=2012$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M=2(xy-yz-zx)$.

Lời giải.

Ta có: $x^2+y^2+z^2=2012 \Leftrightarrow (x+y-z)^2=2012+2(xy-xz-yz)\geq 0$

$\Rightarrow 2(xy-xz-yz)\geq -2012$

Suy ra: $\min_M=-2012$. Dấu bằng xảy ra khi $x+y=z$.

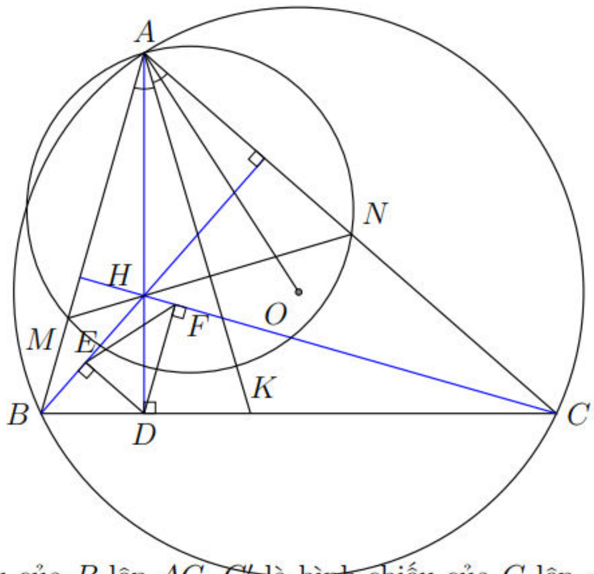
Câu 5. Cho đường tròn (O,R) và dây cung BC cố định $(BC<2R)$. Một điểm A di động trên đường tròn (O,R) sao cho tam giác ABC là tam giác nhọn. Gọi AD là đường cao và H là trực tâm của tam giác ABC.

a) Đường thẳng chứa phân giác ngoài của $\widehat{BHC}$ cắt AB,AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng tam giác MNP cân.

b) Gọi E,F là hình chiếu của D lên BH,CH. Chứng minh rằng OA vuông góc với EF.

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN cắt đường phân giác trong $\widehat{BAC}$ tại K. Chứng minh rằng HK luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải.



a) Gọi B' là hình chiếu của B lên AC, C' là hình chiếu của C lên AB.

Khi đó: $\widehat{AMN} = \widehat{ABH} + \widehat{MHB}; \widehat{ANM} = \widehat{ACH} + \widehat{NHC}$ (1)

Tứ giác $BCB'C'$ là tứ giác nội tiếp nên $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$ (1)

Hơn nữa, MN là phân giác ngoài góc BHC nên $\widehat{MHB} = \widehat{NHC}$ (3)

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra: $\widehat{AMN} = \widehat{ANM}$ hay tam giác AMN cân.

b) Gọi P, Q lần lượt là hình chiếu của D lên AB, AC

Ta có $\widehat{BEP} = \widehat{BDP}$ (tứ giác $BPED$ nội tiếp), $\widehat{BDP} = \widehat{BAD}$ (cùng phụ $\widehat{ABD}$), $\widehat{BAD} =$

$\widehat{HDF}$ (do $\triangle AC'H \backsim \triangle DFH$), $\widehat{HDF} = \widehat{HEF}$ (tứ giác $HEDF$ nội tiếp).

Suy ra: $\widehat{BEP} = \widehat{HEF}$.

Ta có: $\widehat{BEP} + \widehat{BEF} = \widehat{BEF} + \widehat{FEH} = 180^\circ \Rightarrow P, E, F$ thẳng hàng.

Tương tự Q, F, E thẳng hàng.

Vậy đường thẳng EF trùng với đường thẳng PQ (4)

Kẻ tiếp tuyến xAy của đường tròn (O), ta có $OA \perp xAy$ (5)

Khi đó $AP.AB = AD^2 = AQ.AC \Rightarrow \dfrac{AP}{AC} = \dfrac{AQ}{AB} \Rightarrow \triangle APQ \backsim ACB \Rightarrow \widehat{APQ} = \widehat{ACB}$ mà

$\widehat{ACB} = \widehat{xAB}$ (cùng bằng $\dfrac{1}{2}$sđ$\overparen{AB}$)

Suy ra $\widehat{APQ} = \widehat{xAB} \Rightarrow xAy \,/\!/\, PQ$ (6)

Từ $(4),(5),(6)$ suy ra $OA \perp EF$.

c) Gọi T là giao điểm của KM và BH, S là giao điểm của KN và CH.

Do $AM = AN$ và AK là phân giác của MAN nên AK là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN.

Suy ra $HTKS$ là hình bình hành $\Rightarrow HK$ đi qua trung điểm của TS. (7)

Ta có: $\dfrac{TH}{TB} = \dfrac{MC'}{MB}$ (vì $KM \parallel CC'$, $\dfrac{MC'}{MB} = \dfrac{HC'}{HB}$ (vì HM là phân giác góc BHC') suy ra $\dfrac{TH}{TB} = \dfrac{HC'}{HB}$

Tương tự $\dfrac{SH}{SC} = \dfrac{HB'}{HC}$. Tứ giác $BC'B'C$ nội tiếp.

Suy ra $\widehat{C'BH} = \widehat{B'CH} \Rightarrow \dfrac{TH}{TB} = \dfrac{SH}{SC} \Rightarrow TS \parallel BC$ (8)

Từ (7), (8) suy ra HK đi qua trung điểm của BC.

Câu 6. Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn $(x+1)(y+z) = xyz + 2$

Lời giải.

Ta có: $(x+1)(y+z) = xyz + 2 \Leftrightarrow x(y+z-yz) = 2-y-z$.

Với $y+z = yz \Leftrightarrow (1-y)(1-z) = 1 \Rightarrow y = z = 2$. Khi đó, phương trình đã cho trở thành: $4(x+1) = 4x+2$ (mâu thuẫn).

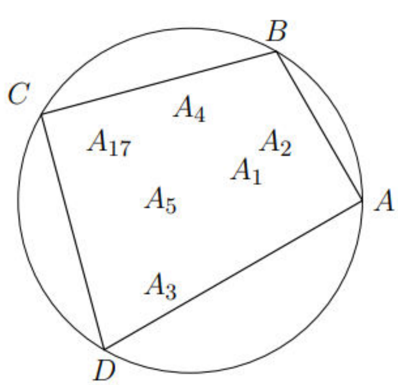
Do đó $y+z \neq yz$. Khi đó: $x = \dfrac{2-y-z}{y+z-yz}$.

Để x nguyên dương thì ta có hai trường hợp:

- Nếu $2-y-z \geq 0, y+z-yz \geq 1$ thì $y+z \leq 2$. Ta tìm được $y = z = 1$. Khi đó, phương trình đã cho tương đương với: $2(x+1) = x+2 \Rightarrow x = 0$ (mâu thuẫn).
- Nếu $2-y-z \leq 0, y+z-yz \leq -1$ hay $x = \dfrac{y+z-2}{yz-y-z}$. Nhận thấy $y+z-2 \geq 0$ và $yz-y-z \geq 1$ nên để x nguyên dương thì $y+z-2 \geq yz-y-z \Leftrightarrow (y-2)(z-2) \leq 2$. Đến đây dễ thấy được phương trình có các nghiệm $(1;3;4), (1;4;3)$.

Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn tâm O, bán kính $R = 2cm$. Chứng minh rằng trong số 17 điểm $A_1, A_2, ..., A_17$ bất kì nằm trong tứ giác $ABCD$ luôn tìm được hai điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn 1.

Lời giải.



Từ tâm O của đường tròn, ta hạ các đường vuông góc xuống các dây cung: AB, BC, CD, DA thì có 4 tứ giác nội tiếp được tạo thành, chúng đều nội tiếp đường tròn có $d = 2$cm. Gọi AA_1A_2O) là 1 trong 4 tứ giác nội tiếp đó. Từ trung điểm của OA, ta hạ các đường vuông góc xuống các cạnh OA_1, OA_2, AA_1, AA_2 của tứ giác nội tiếp AA_1A_2O) thì lần này nò bị chia thành 4 tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính 1cm. Ba tứ giác nội tiếp kia cũng chia theo cách như vậy. Từ đó suy ra có 16 tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính 1cm được tạo thành sau quá trình phân chia trên. khi gieo 17 điểm đã cho vào tứ giác nội tiếp $ABCD$ thì chúng thuộc vào 16 tứ giác nội tiếp trên, theo nguyên lý Derrichle tồn tại 2 điểm cùng thuộc 1 tứ giác nội tiếp và do đó khoảng các giữa chúng cũng không vượt quá 1cm.

==

Chúc các em luyện tập và thi đạt kết quả tốt!