CÁC ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CỦA THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ SỐ 16 - NĂM 2011

Môn: Toán Chuyên - Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

1) Với $a \neq \pm b$ giải phương trình: $(a^4 - b^4)x^2 - 2(a^3 - b^3)x + a^2 - b^2 = 0$

2) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - y - xy = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases}$

Bài 2. (2,0 điểm)

1) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 - 9n - 3$ chia hết cho $n - 11$.

2) Cho ba số x, y, z không âm thỏa mãn $x + y + z = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 + y^2 + z^2$.

Bài 3. (3,5 điểm)

Trên đường tròn tâm O đường kính AB = 2R lấy điểm N sao cho AN = R và điểm M thay đổi trên cung nhỏ BN(M không trùng với B, N). Gọi I là giao điểm của AM và BN. Đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với AB tại H, cắt tia AN tại điểm C.

a) Chứng minh ba điểm B, C, M thẳng hàng.

b) Xác định vị trí của điểm M để chu vi của tứ giác ABMN là lớn nhất.

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MHN thuộc một đường thẳng cố định khi M thay đổi trên cung nhỏ BN của đường tròn (O;R).

d) Gọi P là điểm chính giữa cung AB không chứa điểm N của đường tròn (O;R). Đường thẳng MP cắt AB tại D. Chứng minh rằng MDMA + MDMB không đổi khi M di động trên cung nhỏ BN của đường tròn (O;R).

Bài 4. (1,5 điểm)

Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn $xyz = x^2 - 2z + 2$

Bài 5. (1 điểm)

Chứng minh rằng từ 53 số tự nhiên bất kỳ luôn chọn được 27 số mà tổng của chúng chia hết cho 27.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Với $a \neq \pm b$ giải phương trình: $(a^4-b^4)x^2 - 2(a^3-b^3)x + a^2 - b^2 = 0$.

Lời giải.

$(a^4-b^4)x^2 - 2(a^3-b^3)x + a^2 - b^2 = 0$

có $\Delta' = (a^3+b^3)^2 - (a^4-b^4)(a^2-b^2) = a^6 + b^6 - 2a^3b^3 - a^6 + a^4b^2 + b^4a^2 - b^6$

$= a^2b^2(a^2+b^2-2ab) = [ab(a-b)]^2 \geq 0$.

Vậy phương trình có hai nghiệm

$x_1 = \dfrac{a^3-b^3+ab(a-b)}{a^4-b^4} = \dfrac{a+b}{a^2+b^2}$ và $x_2 = \dfrac{a^3-b^3-ab(a-b)}{a^4-b^4} = \dfrac{a-b}{a^2-b^2}$.

Câu 2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x - y - xy = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6. \end{cases}$

Lời giải.

$\begin{cases} x - y - xy = 2 + 3\sqrt{2} \\ x^2 + y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - xy = 2 + 3\sqrt{2} \\ (x-y)^2 + 2xy = 6. \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} x - y = a \\ xy = b \end{cases}$ khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} a - b = 2 + 3\sqrt{2} & (1) \\ a^2 + 2b = 6 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $b = a - 2 - 3\sqrt{2}$

Thay vào (2) ta được $a^2 + 2(a - 2 - 3\sqrt{2}) = 6 \Leftrightarrow (a+1)^2 = (3+\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2 + \sqrt{2} \\ a = -4 - \sqrt{2}. \end{array}\right.$

Với $a = 2 + \sqrt{2} \Rightarrow b = -2\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2 + \sqrt{2} \\ xy = -2\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow x, -y$ là nghiệm của phương trình $x^2 - (2+\sqrt{2})x + 2\sqrt{2} = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy $\begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -2. \end{cases}$

Với $a = -4 - \sqrt{2} \Rightarrow b = -6 - 4\sqrt{2} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -4 - \sqrt{2} \\ xy = -6 - 4\sqrt{2} \end{cases}$

$\Rightarrow x, -y$ là nghiệm của phương trình $x^2 - (4+\sqrt{2})x + 6 + 4\sqrt{2} = 0$ (phương trình vô nghiệm).

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm $\begin{cases} x = 2 \\ y = -\sqrt{2} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = -2. \end{cases}$

Câu 3. Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho $n^2 - 9n - 3$ chia hết cho $n - 11$.

Lời giải.

Ta có: $n^2 - 9n - 3 = n^2 - 11n + 2n - 22 + 25 = n(n-11) + 2(n-11) + 25$.

Để $n^2 - 9n - 3 \vdots n - 11 \Leftrightarrow 25 \vdots n - 11$.

- Nếu $n - 11 = 1 \Rightarrow n = 12$.
- Nếu $n - 11 = -1 \Rightarrow n = 10$.
- Nếu $n - 11 = 5 \Rightarrow n = 16$.
- Nếu $n - 11 = -5 \Rightarrow n = 6$.
- Nếu $n - 11 = 11 \Rightarrow n = 22$.
- Nếu $n - 11 = -11 \Rightarrow n = 0$ (loại).
  Vậy $n \in \{12; 10; 16; 6; 22\}$.

Câu 4. Cho ba số x, y, z không âm thỏa mãn $x + y + z = 6$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^2 + y^2 + z^2$.

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức **Bunhiacopxki** ta có: $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 = 36 \Rightarrow A \geq 12$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

Mặt khác, từ giả thiết suy ra $0 \leq x, y, z \leq 6 \Rightarrow x(x-6) \leq 0 \Rightarrow x^2 \leq 6x$

Tương tự $y^2 \leq 6y$; $z^2 \leq 6z$

Suy ra $A \leq 6(x + y + z) = 36$, dấu bằng xảy ra khi $(x; y; z) = (0; 0; 6)$ và các hoán vị.

Câu 5. Trên đường tròn tâm O đường kính $AB = 2R$ lấy điểm N sao cho $AN = R$ và điểm M thay đổi trên cung nhỏ BN (M không trùng với B, N). Gọi I là giao điểm của AM và BN. Đường thẳng đi qua điểm I và vuông góc với AB tại H, cắt tia AN tại điểm C.

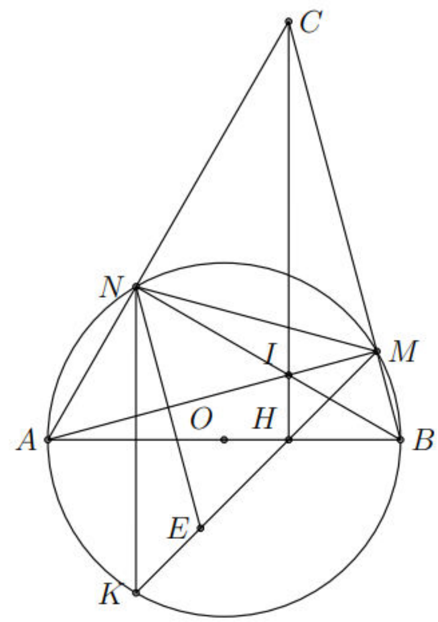
a) Chứng minh ba điểm B, C, M thẳng hàng.

b) Xác định vị trí của điểm M để chu vi của tứ giác $ABMN$ là lớn nhất.

c) Chứng minh tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MHN thuộc một đường thẳng cố định khi M thay đổi trên cung nhỏ BN của đường tròn $(O; R)$.

d) Gọi P là điểm chính giữa cung AB không chứa điểm N của đường tròn $(O; R)$.Đường thẳng MP cắt AB tại D. Chứng minh rằng $\dfrac{MD}{MA} + \dfrac{MD}{MB}$ không đổi khi M di động trên cung nhỏ BN của đường tròn $(O; R)$.

Lời giải.

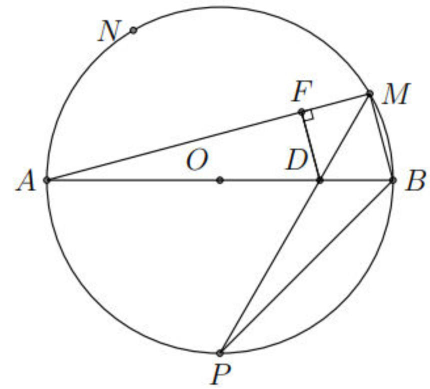


a) Dễ thấy I là trực tâm của tam giác ABC, suy ra $BC \perp AI$ (1).
Mặt khác $\widehat{AMB} = 90^\circ$, suy ra $BM \perp AI$ (2).
Từ (1) và (2) suy ra ba điểm B, M, C thẳng hàng.

b) Lấy K đối xứng với N qua AB, trên đoạn MK lấy điểm E sao cho $ME = MN$.
Vì K đối xứng với N qua AB nên $\widehat{NBK} = 2\widehat{NBA} = 60^\circ$.
Mà $\widehat{NMK} = \widehat{NBK} \Rightarrow \widehat{NMK} = 60^\circ$.
Vậy tam giác NME đều suy ra $NE = MN$ và $\widehat{ENK} = \widehat{BNM}$ (vì cùng bằng $60^\circ - \widehat{ENB}$).
Do đó $\triangle MNB = \triangle ENK (c - g - c)$ suy ra $MB = EK$.
Vì vậy $MN + MB = ME + EK = MK$.
Chu vi tứ giác $ABMN$ bằng $BA + AN + MN + MB = 3R + MK$. Suy ra chu vi tứ giác $ABMN$ lớn nhất khi MK là đường kính của đường tròn (O).

c) Tứ giác $IMBH$ nội tiếp nên $\widehat{IHM} = \widehat{IBM}$. Tứ giác $IHAN$ nội tiếp nên $\widehat{IHN} = \widehat{NAI}$, mặt khác $\widehat{IBM} = \widehat{NAI}$ (cùng chắn cung MN) suy ra $\widehat{IHM} = \widehat{IHN}$ hay $\widehat{NHM} = 2\widehat{NBM}$.
Ngoài ra $\widehat{NOM} = 2\widehat{NBM}$ (tính chất góc nội tiếp).
Suy ra $\widehat{NOM} = \widehat{NHM}$, suy ra tứ giác $MHON$ là tứ giác nội tiếp, do đó tâm đường tròn ngoại tiếp của tứ giác này chính là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle MNH$. Vì vậy tâm đường tròn ngoại tiếp của $\triangle MNH$ nằm trên đường trung trực của đoạn ON cố định

d) Gọi F là hình chiếu của D trên AM.
MD là phân giác của $\triangle MAB$, ta có:
$\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{DA}{DB} = \dfrac{DA}{BA - DA} = \dfrac{DF}{MB - DF}$
$= \dfrac{\frac{MD}{\sqrt{2}}}{MB - \frac{MD}{\sqrt{2}}} = \dfrac{MD}{\sqrt{2}MB - MD}$
suy ra $MA(\sqrt{2}MB - MD) = MB.MD$
$\Leftrightarrow \sqrt{2}MA.MB = MA.MD + MB.MD$
$\Leftrightarrow \dfrac{MD}{MA} + \dfrac{MD}{MB} = \sqrt{2}.$



Câu 6. Tìm tất cả các bộ ba số nguyên dương (x, y, z) thỏa mãn $xyz = x^2 - 2z + 2$.
Lời giải.
$xyz = x^2 - 2z + 2 \Leftrightarrow z = \dfrac{x^2+2}{xy+2}$ là số nguyên dương.

- Nếu $x = y$ thì $z = 1$. Khi đó bộ $(k; k; 1)$ với k là số nguyên dương thỏa mãn đề bài.
- Nếu $x < y$ thì $z < 1$ (không thỏa mãn).
- Nếu $x > y$ thì $x^2 + 2 > xy + 2$.
  Vì z là số nguyên dương nên $(x^2+2) \vdots (xy+2) \Leftrightarrow y(x^2+2) \vdots (xy+2) \Leftrightarrow [x(xy+2) - 2(x-y)] \vdots (xy+2) \Rightarrow 2(x-y) \vdots (xy+2)$.
  Do đó tồn tại số nguyên dương k sao cho $2(x-y) = k(xy+2)$.
  Nếu $k \geq 2 \Rightarrow x - y \geq xy + 2 \Rightarrow (x+1)(y-1) + 3 \leq 0$ (Vô lý).
  Nếu $k = 1 \Rightarrow 2(x-y) = xy + 2 \Leftrightarrow (x+2)(y-2) = -6$.
  Suy ra ta có bộ số $(x; y; z) = (4; 1; 3)$.

Vậy tất cả các bộ nguyên dương $(x; y; z)$ thỏa bài toán là $(4; 1; 3)$ và $(k; k; 1)$ với k nguyên dương.

Câu 7. Chứng minh rằng từ 53 số tự nhiên bất kỳ luôn chọn được 27 số mà tổng của chúng chia hết cho 27.

Lời giải.

Ta sử dụng **bổ đề**: Trong 5 số tự nhiên bất kỳ luôn chọn được 3 số sao cho tổng 3 số chia hết cho 3.

Chứng minh bổ đề: Xét số dư của 5 số tự nhiên khi chia cho 3.

- Nếu có 3 số có cùng số dư khi chia cho 3 thì tổng 3 số đó chia hết cho 3.
- Nếu không có 3 số nào không có cùng số dư khi chia cho 3 thì ít nhất tồn tại 1 số chia hết cho 3, 1 số chia 3 dư 1, 1 số chia 3 dư 2 nên tổng 3 số này chia hết cho 3.

Vậy bổ đề được chứng minh.

Tiếp tục chứng minh: Trong 17 số tự nhiên luôn chọn được 9 số sao cho tổng của 9 số chia hết cho 9.

Áp dụng bổ đề ở trên ta có :

Lấy 3 bộ 5 số ta chọn được 3 bộ số có tổng chia hết cho 3.

Như vậy còn 8 số, lấy tiếp 5 số thì ta chọn được 1 bộ 3 số có tổng chia hết cho 3.

Còn 5 số cuối cùng ta chọn được thêm 1 bộ 3 số có tổng chia hết cho 3.

Do đó ta có 5 bộ 3 số có tổng chia hết cho 3.

Tổng 5 bộ 3 số lần lượt là : $T_1; T_2; T_3T_4; T_5$ Xét 5 số tự nhiên: $\frac{T_1}{3}; \frac{T_2}{3}; \frac{T_3}{3}; \frac{T_4}{3}; \frac{T_5}{3}$ thì ta luôn chọn được 3 số chia hết cho 3 do đó tồn tại 3 số trong 5 tổng trên có tổng chia hết cho 9.

Trong 53 số tự nhiên ta chọn được 5 bộ, mỗi bộ gồm 9 số tự nhiên có tổng chia hết cho 9.

Tổng của các bộ số lần lượt là $S_1; S_2; S_3; S_4; S_5$.

Xét bộ 5 số tự nhiên $\frac{S_1}{9}; \frac{S_2}{9}; \frac{S_3}{9}; \frac{S_4}{9}; \frac{S_5}{9}$ áp dụng bổ đề ban đầu thì ta chọn được 3 số sao cho tổng chia hết cho 3 do đó trong 5 số $S_1; S_2; S_3; S_4; S_5$ sẽ tồn tại 3 số có tổng chia hết cho 27 (điều phải chứng minh).

==

Chúc các em luyện tập và thi đạt kết quả tốt!