VIỆT NAM TOÁN HỌC

CÁC ĐỀ THI VÀO LỚP 10 CỦA THÀNH PHỐ HÀ NỘI

ĐỀ SỐ 15 - NĂM 2010

Môn: Toán Chuyên - Thời gian làm bài: 150 phút

Bài 1. (2,0 điểm)

1) Cho n là số nguyên, chứng minh $A = n^3 + 11n$ chia hết cho 6

2) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $B = n^4 - 3n^2 + 1$ là số nguyên tố

Bài 2. (2,0 điểm)

Cho phương trình : $(m^2 + 2m + 2)x^2 - (m^2 - 2m + 2)x - 1 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho.

1) Tìm các giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2(x_1x_2 - 1)$

2) Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của biểu thức $S = x_1 + x_2$

Bài 3. (2.0 điểm)

1) Cho a là số bất kì, Chứng minh rằng: $\dfrac{a^{2010} + 2010}{\sqrt{a^{2010} + 2009}} \geq 2$

2) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $y^2 - x(x-2)(x^2 - 2x + 2) = 0$

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho đường tròn (O; R) và một điểm M nằm ngoài đường tròn.Đường tròn đường kính OM cắt đường tròn (O; R) tại hai điểm E , F.

1) Chứng minh giao điểm I của đoạn thẳng OM với đường tròn (O;R) là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MEF.

2) Cho A là một điểm bất kì của thuộc cung EF chứa điểm M của đường tròn đường kính OM (A khác E, F). Đoạn thẳng OA cắt đoạn thẳng EF tại điểm B. Chứng minh OA.OB = R^2.

3) Cho biết OM = 2R và N là một điểm bất kì thuộc cung EF chứa điểm I của đường tròn (O; R) (N khác E, F). Gọi d là đường thẳng qua F và vuông góc với đường thẳng EN tại điểm P, d cắt đường tròn đường kính OM tại điểm K (K khác F). Hai đường thẳng FN và KE cắt nhau tại điểm Q. Chứng minh rằng: $PN.PK + QN.QK \le \frac{\sqrt{3}}{2}R^2$

Bài 5. (1,0 điểm)

Giải phương trình: $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = 0$.

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. *(2,0 điểm)*

a) Cho n là số nguyên, chứng minh $A = n^3 + 11n$ chia hết cho 6.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n để $B = n^4 - 3n^2 + 1$ là số nguyên tố.

Lời giải.

a) Ta có $A = (n-1)n(n+1) + 12n \,\vdots\, 6$.

b) Ta có $B = (n^2 - n - 1)(n^2 + n - 1)$. Vì $n^2 - n - 1 < n^2 + n - 1$ nên để B là số nguyên tố thì $n^2 - n - 1 = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} n = -1 \text{ (Loại)} \\ n = 2 \text{ (Thỏa mãn)} \end{array}\right. \Rightarrow n = 2$.

Câu 2. *(2,0 điểm)*Cho phương trình $\left(m^2 + 2m + 2\right)x^2 - \left(m^2 - 2m + 2\right)x - 1 = 0$. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình đã cho.

a) Tìm tất cả các giá trị của m để $x_1^2 + x_2^2 = 2x_1x_2\left(2x_1x_2 - 1\right)$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = x_1 + x_2$.

Lời giải.

a) Theo Viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{m^2-2m+2}{m^2+2m+2} \\ x_1x_2=\dfrac{-1}{m^2+2m+2} \end{cases}$. Theo giả thiết

$(x_1+x_2)^2=4x_1^2x_2^2 \Rightarrow (m^2-2m+2)^2=4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-2m+2=2 \\ m^2-2m+2=-2 \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} m^2-2m=0 \\ m^2-2m+4=0 \text{ (Vô nghiệm)} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$.

- Với $m=0$, thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.
- Với $m=2$, thay vào phương trình ta thấy thỏa mãn.

Vậy các giá trị của m cần tìm là $m=0$, $m=2$.

b) Ta có $S=x_1+x_2=\dfrac{m^2-2m+2}{m^2+2m+2}$.

- $S-(3-2\sqrt{2})=\dfrac{(2\sqrt{2}-2)m^2-4(2-\sqrt{2})m-4(1-\sqrt{2})}{m^2+2m+2}$
$=\dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}m-2)^2}{m^2+2m+2}\geq 0 \Rightarrow S\geq 3-\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $m=\sqrt{2}$.
- $S-(3+2\sqrt{2})=\dfrac{(-2\sqrt{2}-2)m^2-4(2+\sqrt{2})m-4(2+\sqrt{2})}{m^2+2m+2}$
$=\dfrac{-(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}m+2)^2}{m^2+2m+2}\leq 0 \Rightarrow S\leq 3+\sqrt{2}$. Dấu bằng xảy ra khi $m=-\sqrt{2}$.

Vậy $S_{\max}=3+\sqrt{2}$ khi $m=-\sqrt{2}$ và $S_{\min}=3-\sqrt{2}$ khi $m=\sqrt{2}$.

Câu 3. *(2,0 điểm)*

a) Cho a bất kỳ, chứng minh rằng $\dfrac{a^{2010}+2010}{\sqrt{a^{2010}+2009}}>2$.

b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn phương trình $y^2-x(x-2)(x^2-2x+2)=0$.

Lời giải.

a) Áp dụng Cauchy cho $a^{2010}+2009$ và 1 ta có
$a^{2010}+2009+1\geq 2\sqrt{a^{2010}+2009}$. Dấu bằng xảy ra khi $a^{2010}+2009=1$ (vô lí) $\Rightarrow$ đpcm.

b) Đặt $t=(x-1)^2 (t\geq 0) \Rightarrow$ phương trình có dạng $y^2-(t-1)(t-1)=0 \Rightarrow (y-t)(y+t)=-1$.
Vì $t\geq 0$ nên $y+t\geq y-t \Rightarrow$ nên ta có $\begin{cases} y-t=-1 \\ y+t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=0 \\ x=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} y=0 \\ x=0 \end{cases}$.

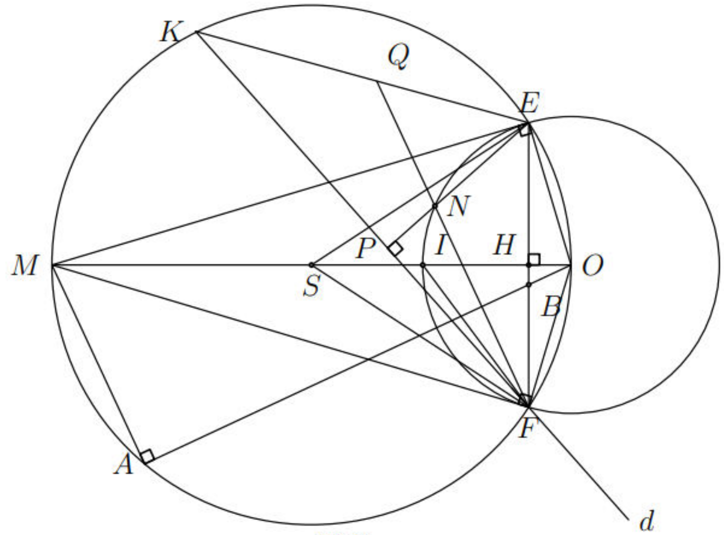
Câu 4. *(3,0 điểm)*Cho đường tròn $(O; R)$ và một điểm M nằm ngoài đường tròn. Đường tròn đường kính OM cắt đường tròn $(O; R)$ tại hai điểm E, F.

a) Chứng minh giao điểm I của đoạn thẳng OM với đường tròn $(O; R)$ là tâm của đường tròn nội tiếp tam giác MEF.

b) Cho A là một điểm bất kỳ thuộc cung EF chứa điểm M của đường tròn đường kính OM (A khác E và F). Đoạn thẳng OA cắt đoạn thẳng EF tại điểm B. Chứng minh $OA.OB = R^2$.

c) Cho biết $OM = 2R$ và N là điểm bất kỳ thuộc cung EF chứa điểm I của đường tròn $(O; R)$ (N khác E và F). Gọi d là đường thẳng qua F và vuông góc với đường thẳng EN tại điểm P, d cắt đường tròn đường kính OM tại điểm K (K khác F). Hai đường thẳng FN và KE cắt nhau tại điểm Q. Chứng minh rằng $PK.PK + QN.QK \le \dfrac{\sqrt{3}}{2}R^2$.

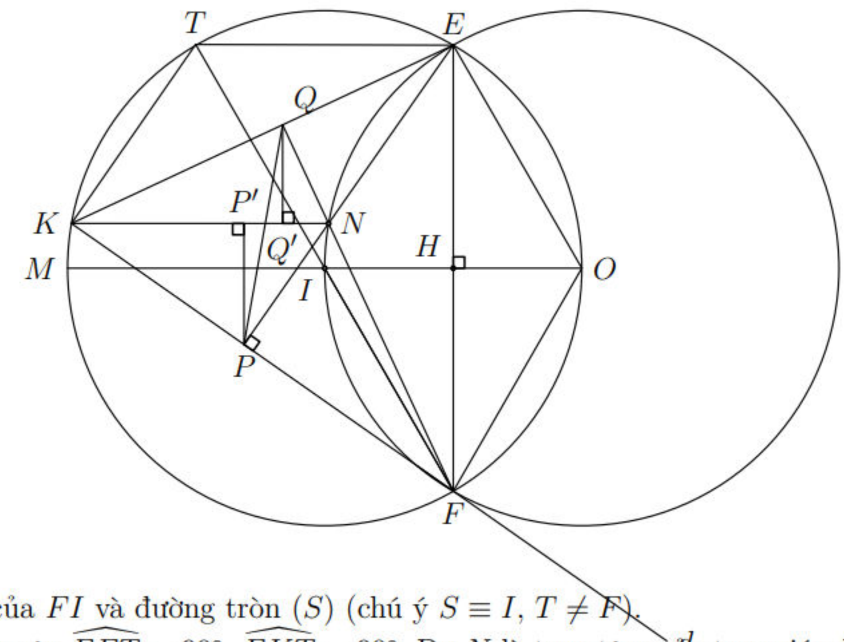
Lời giải.



a) Gọi S là trung điểm $MO \Rightarrow SE = SF = \dfrac{MO}{2} \Rightarrow \widehat{MEO} = \widehat{MFO} = 90^\circ \Rightarrow ME$, MF là tiếp tuyến của đường tròn $(O) \Rightarrow MO$ là tia phân giác $\widehat{EOF} \Rightarrow I$ là điểm chính giữa cung $EF \Rightarrow EI$, FI là các tia phân giác $\widehat{MEF}$ và $\widehat{MFE} \Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MEF.

b) Gọi H là giao điểm của EF và $MO \Rightarrow MO \perp EH$.
Vì MO là đường kính đường tròn $(S) \Rightarrow \widehat{MAO} = 90^\circ \Rightarrow \Delta MAO \backsim \Delta BHO$ (g.g)
$\Rightarrow OA.OB = OM.OH$.
Xét tam giác MEO có $\widehat{MEO} = 90^\circ$, $EH \perp MO \Rightarrow OH.OM = OE^2 \Rightarrow OA.OB = R^2$.

c) Vì $MO = 2R \Rightarrow ME = MF = R\sqrt{3} \Rightarrow EH = \dfrac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow EF = R\sqrt{3} \Rightarrow \Delta MEF$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{EKF} = 60°$, $\widehat{PNQ} = \widehat{FNE} = 120° \Rightarrow KQNP$ là tứ giác nội tiếp đường kính KN
$\Rightarrow \widehat{KQN} = 90°$.



Gọi T là giao điểm của FI và đường tròn (S) (chú ý $S \equiv I$, $T \neq F$).
Vì FT là đường kính nên $\widehat{FET} = 90°$, $\widehat{FKT} = 90°$. Do N là trực tâm của tam giác KEF

nên $KN \perp EF \Rightarrow KTEN$ là hình bình hành (các cạnh đối song song)
$\Rightarrow KN = ET = EF.\cot 60° = \dfrac{R\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = R \Rightarrow PQ = KN.\sin 60° = \dfrac{R\sqrt{3}}{2}$.
Gọi P', Q' lần lượt là hình chiếu vuông góc của P, Q lên KN. Ta có
$2S_{KQNP} = PN.PK + QN.QK = KN(PP' + QQ') \leq KN.PQ = \dfrac{R^2\sqrt{3}}{2}$. Dấu bằng x khi và chỉ khi $PQ \perp KN$, hay $K \equiv M$.

Câu 5. *(1,0 điểm)*Giải phương trình $x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1 = 0$.

Lời giải.

Vì $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ với $\forall x$ nên ta có

$$(x^2 + x + 1)(x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1) = x^{10} + x^5 + 1 = \left(x^5 + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

==

Chúc các em luyện tập và thi đạt kết quả tốt!