

TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT CHUYÊN

(Đề thi gồm 01 trang)

KÌ THI THỬ VÀO LỚP 10 THPT CHUYÊN
NĂM 2023-LẦN 2

BÀI THI MÔN: TOÁN CHUYÊN

Dành cho thí sinh thi thử chuyên Toán, tin

Thời gian làm bài: 120 phút
(không kể thời gian phát đề)

Câu 1. (3 điểm)

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} \sqrt{3x+1} + \sqrt{5-y} = 4 \\ \sqrt{3y+1} + \sqrt{5-x} = 4. \end{cases}$$

2. Cho a, b, c, d là các số thực khác 0, đôi một phân biệt và thỏa mãn

$$\frac{a^2-1}{5a} = \frac{b^2-1}{5b} = \frac{c^2-1}{3c} = \frac{d^2-1}{3d} = n$$

với n là một số nguyên. Chứng minh: $P = (a-c)(b-c)(a+d)(b+d)$ là bình phương của một số nguyên.

Câu 2. (3 điểm)

1. Chứng minh rằng $1 + 2^2 + 3^2 + \dots + 2039^{2039}$ không thể là lũy thừa của một số tự nhiên với số mũ lớn hơn 1.

2. Xét các số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{1+x^2}{z+2} + \frac{1+y^2}{x+2} + \frac{1+z^2}{y+2}$.

Câu 3. (3 điểm) Cho tam giác ABC ngoại tiếp đường tròn (I) . Gọi E, F theo thứ tự là tiếp điểm của (I) với các cạnh AC, AB . Gọi (K) là đường tròn đi qua B , tiếp xúc với đường thẳng AI tại I . Đường tròn này cắt đường thẳng AB tại điểm thứ hai P (khác B). Gọi (L) là đường tròn đi qua C và tiếp xúc với đường thẳng AI tại I , đường tròn này cắt đường thẳng AC tại điểm thứ hai Q (khác C). Chứng minh rằng:

- Tứ giác $BPQC$ nội tiếp.
- Đường thẳng PQ tiếp xúc với đường tròn (I) .
- Các đường thẳng KF và LE cắt nhau tại một điểm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Câu 4. (1 điểm) Cho bảng ô vuông kích thước 2023×2023 . Lần lượt điền 2023^2 số nguyên dương đầu tiên: $1, 2, 3, 4, \dots, 2023^2$ vào các ô vuông con của bảng sao cho mỗi ô được điền đúng một số, ở mỗi dòng tính từ trái sang phải hoặc ở mỗi cột tính từ trên xuống dưới, các số được điền theo thứ tự tăng dần. Thực hiện việc thay đổi số theo quy tắc sau: mỗi lần chọn 2 ô chung nhau cạnh hoặc chung nhau đúng một đỉnh:

- +/ Nếu hai ô đó chung cạnh thì tăng số ở một ô thêm 2 đơn vị và giảm số trong ô còn lại 2 đơn vị.
 - +/ Nếu hai ô đó chung nhau đúng một đỉnh thì cùng tăng hoặc cùng giảm số trong hai ô đó 2 đơn vị.
- Hỏi sau một số lần chơi ta có thể thu được bảng gồm toàn các số 2023 được không? Vì sao?

-----Hết-----

Ghi chú: Thí sinh không được sử dụng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.