Một số chuyên đề

TOÁN NÂNG CAO DÀNH CHO HỌC SINH PHỔ THÔNG

w w w . t o a n h o c v i e t n a m . c o m

Tác giả: **Nguyễn Kim Sổ**

Hội Toán học Việt Nam

CÁC KÝ HIỆU TOÁN HỌC THÔNG DỤNG DÙNG TRONG TÀI LIỆU

1. **IMO** : Cuộc thi học sinh giỏi toán quốc tế.
2. **VMO** : Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia Việt Nam.
3. **ĐHKHTN** : Đại học Khoa Học Tự Nhiên.
4. **ĐHSPHN** : Đại học Sư Phạm Hà Nội.
5. **N** : Tập số tự nhiên.
6. **N*** : Tập các số nguyên dương.
7. **Z** : Tập các số nguyên.
8. **Q** : Tập số hữu tỷ.
9. **R** : Tập số thực.
10. $\emptyset$: Tập rỗng.
11. **a ⋮ b** : a chia hết cho b.
12. **d|m** : d là ước số của m.
13. **ƯCLN(a; b)** : Ước số chung lớn nhất của 2 số a và b.
14. **BCNN(a; b)** : Bội số chung nhỏ nhất của 2 số a và b.
15. **(a; b) = 1** : Hai số a và b nguyên tố cùng nhau.
16. $\sum_{i=1}^{n} x_i$: Tổng $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ (tổng Sigma).
17. $\prod_{i=1}^{n} x_i$: Tích $x_1 . x_2 \ldots x_n$.
18. **n!** : Tích n số nguyên dương đầu tiên.
19. **[x]** : Phần nguyên của số thực x, là số nguyên không vượt quá x.
20. **{x}** : Phần lẻ của số thực x, {x} = x – [x].
21. **BĐT** : Bất đẳng thức.
22. **VT** : Vế trái.
23. **VP** : Vế phải.

Chuyên đề nâng cao

Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức…

Đối với dạng toán này, rất nhiều học sinh nhất là ở bậc THCS khi gặp còn bỡ ngỡ và lúng túng vì trong chương trình SGK chưa đề cập nhiều về cách giải. Mấu chốt vẫn là đánh giá, sử dụng thành thạo các bất đẳng thức thông qua biến đổi cơ bản về dạng tổng hoặc hiệu của biểu thức không âm(bình phương, trị tuyệt đối…) hoặc thông qua các bất đẳng thức cổ điển quen thuộc như Cauchy, Bunhiacopxi, Svác–xơ…

CÁC KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Để tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của biểu thức f(x,y,z…) chúng ta phải tuân thủ và thực hiện đầy đủ 3 bước:
Bước 1: Tìm cận trên A mà $f(x, y, z…) \leq A$ với mọi x, y, z…
Bước 2: Chỉ ra 1 bộ $(x_0, y_0, z_0...)$ mà $f(x_0, y_0, z_0…) = A$
Bước 3: Kết luận GTLN của biểu thức là A.

2. Để tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN) của biểu thức f(x,y,z…) chúng ta phải tuân thủ và thực hiện đầy đủ 3 bước:
Bước 1: Tìm cận dưới B mà $f(x, y, z…) \geq B$ với mọi x, y, z…
Bước 2: Chỉ ra 1 bộ $(x_0, y_0, z_0...)$ mà $f(x_0, y_0, z_0…) = B$
Bước 3: Kết luận GTNN của biểu thức là B.

Lưu ý:

Nếu thiếu một trong các bước trên thì lời giải không đầy đủ, thậm chí cho kết quả sai! Đã có rất nhiều học sinh phân tích $x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ từ đó kết luận GTNN của biểu thức $x^4 + x^2 + 1$ là $\frac{3}{4}$!

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI CƠ BẢN

Dạng toán này rất hay gặp trong nhưng năm gần đây. Thường dưới dạng bất đẳng thức hoặc tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất…có điều kiện. Để làm được đòi hỏi học sinh phải có kinh nghiệm, tư duy nhậy bén, tinh tế và sử dụng thành thạo các hằng đẳng thức cơ bản, các biến đổi cơ bản. Đặc biệt lưu ý: đây là dạng bài khó và nếu biến đổi quá đà rất dễ dẫn đến mất phương hướng trong việc đi tìm lời giải.

1. $a^2 \geq 0$ với mọi $a \in R$.
2. Nếu $a \in [0; 1]$ thì: $a^m \leq a^n$ với mọi $m, n \in N$ và $m \geq n$.
3. Nếu $a \in [-1; 1]$ thì: $a^2 \leq |a|$
4. $|a + b| \leq |a|+|b|$ với mọi $a, b \in R$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a.b \geq 0$.
5. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}$ với mọi $a,b \in R_+$.
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a.b = 0$.
6. Bất đẳng thức tam giác: Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác, khi đó $|b - c| < a < b + c$
7. Nếu $a \leq x \leq b$ thì $(x - a)(x - b) \leq 0$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = a$ hoặc $x = b$.

Ngoài các các biến đổi cơ bản thì phương pháp đổi biến cũng hay được sử dụng để đưa về những bài toán quen thuộc với điều kiện dễ chịu hơn. Cụ thể như sau:

* Nếu bài toán cho $a \in [0; 2]$ thì nên đặt $x = a - 1$ hoặc $a \in [3; 5]$ thì đặt $x = a - 4$. Mục đích để quy về $x \in [-1; 1]$ khi đó $x^2 \leq |x|$.

* Nếu điều kiện cho $a \geq 2$; $b \geq 3$… thì đặt $a = x + 2$; $b = y + 3$. Mục đích để quy về chung khoảng $x, y \geq 0$ khi đó việc sử dụng điều kiện sẽ thống nhất và dễ giải hơn!

* Nếu điều kiện và dạng bất đẳng thức đối xứng(vai trò các biến như nhau) thì ta có thể giả sử $a \leq b \leq c$ … hoặc $x \leq y \leq z$ … mà không làm giảm tính tổng quát của bài toán.

Bài toán 1:
Với x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, tìm GTLN của biểu thức $S = x^2 + y^8 + z^{2022} - xy - xz - yz$.

Lời giải:

Thực chất bài toán này chủ yếu HS cần nhanh nhậy, đánh giá dựa vào điều kiện chứ không thể biến đổi thêm được gì từ S.

Cụ thể từ giả thiết $x, y, z \geq 0$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 1 \Rightarrow 0 \leq x, y, z \leq 1$ nên sử dụng nhận xét trên ta có:

$y^8 \leq y^2$, $z^{2002} \leq z^2$ và $xy + yz + zx \geq 0$

$\Rightarrow S = x^2 + y^8 + z^{2022} - (xy + xz + yz) \leq x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Mặt khác với chẳng hạn $x = 1; y = z = 0$ thì $S = 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của S là 1.

Bài toán 2:
Cho các số thực $0 \leq x, y, z \leq 2$ và thỏa mãn $x + y + z = 3$.
Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $S = x^2 + y^2 + z^2$.

Lời giải:

Để tìm GTLN chúng ta sử dụng cách đặt ẩn phụ và quy về BĐT cơ bản như sau:

Đặt $a = x - 1; b = y - 1; c = z - 1$. Khi đó $-1 \leq a, b, c \leq 1$ và $a + b + c = 0$.

Khi đó $S = x^2 + y^2 + z^2 = (a + 1)^2 + (b + 1)^2 + (c + 1)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(a + b + c) + 3 = a^2 + b^2 + c^2 + 3$

Vì a, b, c $\in [-1; 1] \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le |a| + |b| + |c|$.

Theo nguyên tắc DIRICLET thì trong 3 số a, b, c phải có ít nhất 2 số cùng dấu(quy ước số 0 cùng dấu với mọi số thực). Không làm giảm tính tổng quát có thể coi đó là b và c. Khi đó $|a| + |b| + |c| = |a| + |b + c| = |a| + |-a| = 2|a| \le 2$.

Do vậy $S \le 3 + 2 = 5$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi (a, b, c) là các hoán vị của (1; −1; 0) hay (x, y, z) là các hoán vị của (0; 1; 2). Vậy giá trịn lớn nhất của S là 5;

Đối với GTNN thật đơn giản, từ $S = a^2 + b^2 + c^2 + 3 \Rightarrow S \ge 3$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 0$ hay $x = y = z = 1$. Vậy kết luận giá trịn lớn nhất của S là 3.

Bài toán 3:
Cho các số thực $0 \le x, y, z \le 1$ thỏa mãn $x + y + z = \frac{3}{2}$.
Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $S = x^2 + y^2 + z^2$.

[Đề thi Olympic lớp 8 quận Hoàng Mai – Hà Nội 2020 – 2021]

Lời giải:

Ta đổi biến như sau: đặt $a = 2x - 1$; $b = 2y - 1$ và $c = 2z - 1$, khi đó $-1 \le a, b, c \le 1$ và $a + b + c = 2(x + y + z) - 3 = 0$.

Lúc này $S = x^2 + y^2 + z^2 = \left(\frac{1-a}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-c}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) - \frac{1}{2}(a + b + c) + \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2) + \frac{3}{4}$.

Chứng minh tương tự như trên ta được $0 \le a^2 + b^2 + c^2 \le 2$ suy ra:

$\frac{3}{4} \le S \le \frac{5}{4}$. Dễ thấy với $x = y = z = \frac{1}{2}$ thì $S = \frac{3}{4}$, với chẳng hạn $x = 1$; $y = \frac{1}{2}$; $z = 0$ thì $S = \frac{5}{4}$.

Vậy kết luận GTNN của S là $\frac{3}{4}$ và GTLN của S là $\frac{5}{4}$.

Bài toán 4:
Cho các số thực $0 \le a, b, c \le 1$ thỏa mãn $a + b + c = 2$.
Tìm GTNN và GTLN của biểu thức $S = \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca}$

[Đề thi HSG toán lớp 9 TP. Hà Nội năm 2021 – 2022]

Lời giải:

Tìm GTNN ta làm như sau:

Vì $0 \le a, b, c \le 1 \Rightarrow (1 - a)(1 - b) \ge 0 \Rightarrow 1 - a - b + ab \ge 0 \Rightarrow a + b \le 1 + ab$.
Từ đó suy ra $\frac{a+b}{1+ab} \le 1$

Bằng cách tương tự ta cũng có: $\frac{b+c}{1+bc} \le 1$ và $\frac{c+a}{1+ca} \le 1$

Mặt khác, không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $0 \le a \le b \le c$. Khi đó:

$S = \frac{ab}{1+ab} + \frac{bc}{1+bc} + \frac{ca}{1+ca} = 3 - (\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca}) = 3 - \frac{1}{2}(\frac{2}{1+ab} + \frac{2}{1+bc} + \frac{2}{1+ca})$

$= 3 - \frac{1}{2}(\frac{a+b+c}{1+ab} + \frac{a+b+c}{1+bc} + \frac{a+b+c}{1+ca})$

Đặt $P = \frac{a+b+c}{1+ab} + \frac{a+b+c}{1+bc} + \frac{a+b+c}{1+ca}$ ta thấy:

$P = \frac{a+b}{1+ab} + \frac{b+c}{1+bc} + \frac{a+c}{1+ca} + \frac{c}{1+ab} + \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} \le 3 + \frac{c}{1+ab} + \frac{a}{1+bc} + \frac{b}{1+ca} \le 3 + \frac{c}{1+ab} + \frac{a}{1+ab} + \frac{b}{1+ab}$

$\Rightarrow P \le 3 + \frac{a+b+c}{1+ab} \le 3 + a + b + c = 5 \Rightarrow S \ge 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi (a; b; c) là hoán vị của (0; 1; 1).

Vậy GTNN của S là $\frac{1}{2}$.

Tìm giá trị lớn nhất:

Biến đổi tương tự như trên $S = 3 - \left(\frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ca}\right)$

Đặt $Q = \frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ca}$, sử dụng bất đẳng thức Svac–xơ:

$Q = \frac{1}{1 + ab} + \frac{1}{1 + bc} + \frac{1}{1 + ca} \geq \frac{9}{3 + ab + bc + ca}$.

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức quen thuộc $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + bc + ca)$

Suy ra $ab + bc + ca \leq \frac{4}{3} \Rightarrow Q \geq \frac{27}{13} \Rightarrow S \leq 3 - \frac{27}{13} = \frac{12}{13}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{2}{3}$.

Vậy kết luận: GTLN của S là $\frac{12}{13}$.

Bài toán 5:
Cho x,y là các số thực không âm thỏa mãn $x^2 + y^2 = 4$.
Tìm GTNN của biểu thức $S = x + 2y$.

[Đề thi tuyển sinh vào lớp 10 THPT TP.Hà Nội năm 2022 – 2023]

Lời giải:

Ta thấy $S = x + 2y$ suy ra: $S^2 = (x + 2y)^2 = x^2 + 4y^2 + 4xy = (x^2 + y^2) + 3y^2 + 4xy = 4 + 3y^2 + 4xy$.

Vì $x, y \in R_+ \Rightarrow 3y^2 + 4xy \geq 0$. Do đó $S^2 \geq 4 \Rightarrow S \geq 2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2; y = 0$.

Vậy kết luận GTNN của S là 2.

Lời bình:

Đây là bài toán(0.5đ) biến đổi khá đơn giản nhưng có lẽ là cũng bất ngờ với nhiều bạn học sinh. Bởi đa phần các bài tập dạng này sẽ như sau:

Cho $x^2 + y^2 = A$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $S = ax + by$ và các bạn đã quen với biệc sử sụng bất đẳng thức Bunhiacopxki. Tuy nhiên điều kiện "x,y là các số thực không âm" trong trường hợp này thực sự thách thức các bạn!

Bài toán 6:
Với a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn điều kiện a + b + c = 16.
Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:
$P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b}$

[Đề thi HSG toán lớp 9 TP. Hà Nội năm 2022 – 2023]

Lời giải:

Đối với bài toán này rất nhiều bạn sẽ biến đổi về dạng có thể sử dụng bất đẳng thức Cauchy. Tuy nhiên, khi đó dấu "=" xảy ra khi $a = b = c = \frac{16}{3} \notin N^*$ dẫn đến kết quả không phù hợp với yêu cầu đề ra.

Do vậy với các dạng bài tập này chúng ta bắt buộc phải sử dụng các biến đổi cơ bản và tận dụng tính đối xứng của bài toán. Cụ thể như sau:

Tìm GTLN:

Trước hết ta biến đổi: $P = \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} = \frac{16-c}{c} + \frac{16-a}{a} + \frac{16-b}{b} = 16(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) - 3$ (1)

Do $a, b, c \in N^*$ và $a + b + c = 16 \Rightarrow a = 16 - b - c \leq 14 \Rightarrow a \in [1; 14] \Rightarrow (a - 1)(a - 14) \leq 0$

$\Rightarrow a^2 - 15a + 14 \le 0 \Rightarrow a^2 + 14 \le 15a \Rightarrow a + \frac{14}{a} \le 15 \Rightarrow \frac{1}{a} \le \frac{1}{14}(15 - a)$

Bằng cách tương tự ta thu được: $\frac{1}{b} \le \frac{1}{14}(15 - b)$ và $\frac{1}{c} \le \frac{1}{14}(15 - c)$

$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{1}{14}(15 - a) + \frac{1}{14}(15 - b) + \frac{1}{14}(15 - c) = \frac{15.3}{14} - \frac{1}{14}(a + b + c) = \frac{29}{14}$

Kết hợp với (1) ta được $P \le 16.\frac{29}{14} - 3 = \frac{211}{7}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi (a; b; c) là hoán vị của (1; 1; 14).

Vậy kết luận GTLN của P là $\frac{211}{7}$.

Tìm GTNN:

Chúng ta vẫn sử dụng biến đổi $P = 16(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) - 3$ như đã làm ở trên.

Vì vai trò của a, b, c như nhau nên ta có thể giả sử $a \le b \le c$ mà không làm giảm tính tổng quát của bài toán.

Khi đó từ $a + b + c \le 3c \Rightarrow c \ge \frac{16}{3}$ và vì $c \in N^*$ $\Rightarrow c \ge 6$.

Mặt khác sử dụng bất đẳng thức cộng mẫu Svac–xơ ta có: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{c} + (\frac{1^2}{a} + \frac{1^2}{b}) \ge \frac{1}{c} + \frac{4}{a+b} = \frac{1}{c} + \frac{4}{16-c}$

Đến đây là tương đối khó cho học sinh lớp 9! Nếu với học sinh THPT biết dùng đạo hàm để xét tính đồng biến nghịch biến của hàm số $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{4}{16-x}$ thì có lẽ phù hợp hơn.

Tuy nhiên, dựa vào trực giác có thể thấy nếu c tăng thì $\frac{1}{c}$ giảm không đáng kể, còn $\frac{4}{16-c}$ tăng nhanh hơn nên có thể suy luận rằng $\frac{1}{c} + \frac{4}{16-c}$ đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{17}{30}$ tại c = 6.

Thật vậy, xét hiệu $\frac{1}{c} + \frac{4}{16-c} - \frac{17}{30} = \frac{17c^2 - 182c + 480}{30c(16-c)} = \frac{(c-6)(17c-80)}{30c(16-c)} \ge 0$ do $c - 6 \ge$ và $17c - 182 \ge 17.6 - 80 > 0$. Vậy $P \ge 16.\frac{17}{30} - 3 = \frac{91}{15}$.

Mặt khác với c = 6; a = b = 5 thì P $= \frac{91}{15}$. Kết luận GTNN của P là $\frac{91}{15}$.

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. *[Đề thi khảo sát kiến thức lớp 8 – trường THCS Cầu Giấy năm 2023]*

Tìm GTLN của biểu thức $B = \frac{x^2 - xy + y^2}{x^2 + xy + y^2}$ với x, y là các số thực và không đồng thời bằng 0.

Bài 2. Cho các số thực x, y, z ∈ [0; 2] thỏa mãn x + y + z = 3.

Tìm GTNN và GTLN biểu thức $S = x^3 + y^3 + z^3 - 3(x - 1)(y - 1)(z - 1)$.

Bài 3. Với các số không âm a, b, c thỏa mãn a + b + c = 3.

Tìm GTNN, GTLN của biểu thức: $S = \sqrt{16a + 9} + \sqrt{16b + 9} + \sqrt{16c + 9}$.

Bài 4. Cho x, y, z là các số thực không âm thỏa mãn x + y + z = 4.

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $S = x^2 + y^2 + z^2$.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn a + b + c = 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \sqrt{a + \frac{(b-c)^2}{4}} + \sqrt{b + \frac{(c-a)^2}{4}} + \sqrt{c + \frac{(a-b)^2}{4}}$$

(còn tiếp)

Lớp chuyên Toán thầy Số

Liên hệ: 093.464.1088

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. X. V. Cônhiagin, G. A. Tônôian, I. F. Sarưghin: Các đề thi vô địch toán của các nước (Nguyễn Đễ, Nguyễn Khánh Nguyên dịch từ tiếng Nga), Nhà xuất bản Hải Phòng, 1993.

2. Đề thi HSG các cấp của các quận(huyện), tỉnh(thành phố) trên cả nước, đề thi VMO, IMO.

3. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

4. Các chuyên đề SEMINAR Hội toán học Hà Nội.

5. Các website về Toán học trong nước và nước ngoài.