Một số chuyên đề

TOÁN NÂNG CAO DÀNH CHO HỌC SINH PHỔ THÔNG

www.toanhocvietnam.com

Tác giả: **Nguyễn Kim Sổ**

Hội Toán học Việt Nam

CÁC KÝ HIỆU TOÁN HỌC THÔNG DỤNG DÙNG TRONG TÀI LIỆU

1. **IMO** : Cuộc thi học sinh giỏi toán quốc tế.
2. **VMO** : Kỳ thi học sinh giỏi quốc gia Việt Nam.
3. **ĐHKHTN** : Đại học Khoa Học Tự Nhiên.
4. **ĐHSPHN** : Đại học Sư Phạm Hà Nội.
5. **N** : Tập số tự nhiên.
6. $\mathbf{N}^*$: Tập các số nguyên dương.
7. **Z** : Tập các số nguyên.
8. **Q** : Tập số hữu tỷ.
9. **R** : Tập số thực.
10. $\emptyset$: Tập rỗng.
11. **a ⋮ b** : a chia hết cho b.
12. **d|m** : d là ước số của m.
13. **ƯCLN(a; b)** : Ước số chung lớn nhất của 2 số a và b.
14. **BCNN(a; b)** : Bội số chung nhỏ nhất của 2 số a và b.
15. **(a; b) = 1** : Hai số a và b nguyên tố cùng nhau.
16. $\sum_{i=1}^{n} x_i$: Tổng $x_1 + x_2 + ... + x_n$ (tổng Sigma).
17. $\prod_{i=1}^{n} x_i$: Tích $x_1 . x_2 ... x_n$.
18. **n!** : Tích n số nguyên dương đầu tiên.
19. **[x]** : Phần nguyên của số thực x, là số nguyên không vượt quá x.
20. **{x}** : Phần lẻ của số thực x, {x} = x – [x].
21. **BĐT** : Bất đẳng thức.
22. **VT** : Vế trái.
23. **VP** : Vế phải.

Khai thác từ điều kiện bài toán

a + b + c + 2 = abc

Như tôi đã trình bày trong các bài giảng trước. Những bài toán liên quan đến biến đổi cơ bản này rất hay gặp trong đề thi học sinh giỏi, thi vào các trường chuyên... các năm gần đây. Thường dưới dạng bất đẳng thức hoặc tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất…có điều kiện.

Để làm được đòi hỏi học sinh phải có kinh nghiệm, tư duy nhậy bén, tinh tế và sử dụng thành thạo các hằng đẳng thức cơ bản, các biến đổi cơ bản. Đặc biệt lưu ý: *đây là dạng bài khó và nếu biến đổi quá đà rất dễ dẫn đến mất phương hướng trong việc đi tìm lời giải*.

Bài toán 1:
Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn 2 + a + b + c = abc.
Chứng minh rằng: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$.

Lời giải:

Bằng cách thêm bớt hạng tử 2 vế của điều kiện bài ra ta có:

$2 + a + b + c = abc \Rightarrow (1 + a + b + ab) + (1 + b + c + bc) + (1 + c + a + ca) = 1 + a + b + c + ab + bc + ca + abc \Rightarrow (1 + a)(1 + b) + (1 + b)(1 + c) + (1 + ac)(1 + a) = (1 + a)(1 + b)(1+ c)$.

Vì $a, b, c > 0$ nên $(1 + a)(1 + b)(1 + c) \neq 0$, chia cả 2 vế của đẳng thức trên cho $(1 + a)(1 + b)(1 + c)$ ta thu được: $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$, bài toán được chứng minh.

Bài toán 2:
Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn 2 + a + b + c = abc.
1. Chứng minh rằng a + b + c ≥ 6
2. Chứng minh rằng a.b.c ≥ 8

Lời giải:

Đối với bài toán này với a, b, c là các số "không âm" và mang tính đối xứng(vai trò a, b, c như nhau), dự đoán giá trị lớn nhất xảy ra khi a = b = c và phương trình $2 + 3a = a^3$ tìm được ngay nghiệm a = 2. Vì thế ta nghĩ ngay đến bất đẳng thức Cauchy và có cách giải như sau:

Cách 1:

Từ 2 + a + b + c = abc và a, b, c không âm, sử dụng bất đẳng thức Cauchy ta có $2 + a + b + c = abc \le (\frac{a + b + c}{3})^3$.

Đặt $a + b + c = t \Rightarrow 2 + t \le \frac{t^3}{27} \Rightarrow t^3 - 27t - 54 \ge 0 \Rightarrow (t - 6)(t + 3)^2 \ge 0$.

Suy ra t ≥ 6 hay a + b + c ≥ 6. Từ đó a.b.c ≥ 8.

Cách 2:

Từ kết quả bài toán 1 ta được: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$, sử dụng bất đẳng thức Svác–xơ:

$$1 = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{1^2}{1+a} + \frac{1^2}{1+b} + \frac{1^2}{1+c} \ge \frac{(1+1+1)^2}{1+a+1+b+1+c} = \frac{9}{3+a+b+c}$$

$\Rightarrow 3 + a + b + c \ge 9$ hay a + b + c ≥ 6.

Cách 3:

Từ dự đoán dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 2, áp dụng bất đẳng thức Cauchy với 4 số ta được:

$abc = 2 + a + b + c \geq 4\sqrt[4]{2abc} \Rightarrow abc \geq 8 \Rightarrow a + b + c \geq 6$. Tất nhiên còn nhiều con đường, hướng đi khác từ điều kiện hay và rất đặc biệt này. Bạn đọc có thể tự mình khai phá thêm.

Lời bình:

Từ bài toán trên chúng ta thấy rằng: bằng cách biến đổi linh hoạt các hằng đẳng thức(mở rộng) kết hợp với phương pháp xét dấu và các bất đẳng thức cổ điển(Cauchy, Bunhiacopxki, Svác-xơ) đã tạo ra nhiều hướng đi khác nhau để giải quyết vấn đề và cũng từ sự phân tích biểu thức ***a + b + c + 2 = abc*** *theo các cách trên sẽ là chìa khóa giúp học sinh giải được một lớp các bài toán liên quan đến điều kiện đặc trưng này!*

Bài toán 3:
Cho a, b, c là các số thực không âm thỏa mãn $2 + a + b + c = abc$.
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $S = \dfrac{a^3 + b^3 + c^3}{ab + bc + ca}$

[Đề kiểm tra kiến thức Toán lớp 9 – Đợt 1 – chuyên ĐHKHTN 2023]

Lời giải:

Bài này có thể có nhiều hướng đi khác nhau, tuy nhiên ở đây tôi trình bày 2 phương pháp như sau:

Cách 1:

Từ giả thiết $2 + a + b + c = abc \Rightarrow a + b + c \geq 6$.

Mặt khác, vì vai trò của a, b, c như sau nên không giảm tính tổng quát ta có thể giả sử $a \leq b \leq c \Rightarrow a^2 \leq b^2 \leq c^2$. Sử dụng bất đẳng thức Chebyshev ta được:

$(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) \leq 3(a^3 + b^3 + c^3) \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$.

Sử dụng bất đẳng thức cơ bản $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq 2(ab + bc + ca)$.

Từ đó S = $\frac{a^3+b^3+c^3}{ab+bc+ca} \geq \frac{2(ab+bc+ca)}{ab+bc+ca} = 2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 2. Vậy giá trị nhỏ nhất của S là 2.

Cách 2:

Từ 2 + a + b + c = abc $\Rightarrow \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$.

Đến đây ta biến đổi một chút và sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki:

$(a+b+c)^2 = (\frac{1}{\sqrt{1+a}}a\sqrt{1+a} + \frac{1}{\sqrt{1+b}}b\sqrt{1+b} + \frac{1}{\sqrt{1+c}}c\sqrt{1+c})^2 \leq (\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c})[a^2(1+a) + b^2(1+b) + c^2(1+c)]$.

Hay $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca \leq a^3 + b^3 + c^3 + a^2 + b^2 + c^2$.

Suy ra $a^3 + b^3 + c^3 \geq 2(ab + bc + ca) \Rightarrow \frac{a^3+b^3+c^3}{ab+bc+ca} \geq 2$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 2.

Ta vẫn thu được kết quả như trên GTNN của S là 2.

Bài toán 4:
Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn a + b + c + 2 = abc.
Chứng minh rằng: $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} \geq 2$.

Lời giải:

Theo như phân tích ở trên, từ a + b + c + 2 = abc ta đã thu được hệ thức: $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = 1$.

Suy ra $\frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} + 1 = \frac{a}{1+b} + \frac{b}{1+c} + \frac{c}{1+a} + \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + \frac{1}{1+c} = \frac{a+1}{1+b} + \frac{b+1}{1+c} + \frac{c+1}{1+a}$.

Đến đây sử dụng bất đẳng thức Cauchy với 3 số $\frac{a+1}{1+b}$; $\frac{b+1}{1+c}$; $\frac{c+1}{1+a}$ ta có:

$\frac{a+1}{1+b}+\frac{b+1}{1+c}+\frac{c+1}{1+a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{a+1}{1+b}.\frac{b+1}{1+c}.\frac{c+1}{1+a}}=3\Rightarrow \frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a}+1\geq 3$ hay $\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a}\geq 2$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}\frac{a+1}{1+b}=\frac{b+1}{1+c}=\frac{c+1}{1+a}\\ \frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=2.$$

Bài toán được chứng minh.

Ngoài ra, từ bài toán trước cũng với điều kiện tương tự ta đã chỉ ra: a + b + c ≥ 6, biến đổi một chút và sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có hướng đi khác cho bài toán này như sau:

$$(a+b+c)^2=\left(\sqrt{a(1+b)}\sqrt{\frac{a}{1+b}}+\sqrt{b(1+c)}\sqrt{\frac{b}{1+c}}+\sqrt{c(1+a)}\sqrt{\frac{c}{1+a}}\right)^2\leq$$
$$[a(1+b)+b(1+c)+c(1+a)]\left(\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a}\right).$$

Suy ra $\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+ab+bc+ca}$.

Mặt khác: $a+b+c\geq 6\Rightarrow (a+b+c)^2\geq 6(a+b+c)\Rightarrow 3(a+b+c)^2\geq 6(a+b+c)+2(a+b+c)^2\geq 6(a+b+c)+6(ab+bc+ca)=6(a+b+c+ab+bc+ca)\Rightarrow\frac{(a+b+c)^2}{a+b+c+ab+bc+ca}\geq 2\Rightarrow\frac{a}{1+b}+\frac{b}{1+c}+\frac{c}{1+a}\geq 2.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b = c = 2.

Đặc biệt lưu ý:

Từ 2 + a + b + c = abc ta khó có thể tìm ra sự tương quan giữa a, b, c nhưng sau khi đã biến đổi về $\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}=1$ *ta có thể đặt* $a=\frac{y+z}{x}$; $b=\frac{z+x}{y}$; $c=\frac{x+y}{z}$. *Đây là cách rất hữu hiệu để giải các bài toán bất đẳng thức sau này với điều kiện tương tự.*

BÀI TẬP TỰ GIẢI

Bài 1. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn 2 + a + b + c = abc.

Chứng minh rằng: $\frac{1}{\sqrt{1+a}} + \frac{1}{\sqrt{1+b}} + \frac{1}{\sqrt{1+c}} \leq \sqrt{3}$.

Bài 2. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn 2 + a + b + c = abc.

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: S = $\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}$.

Bài 3. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn 2 + a + b + c = abc.

Chứng minh rằng:

1. ab + bc + ca ≥ 2(a + b + c)

2. $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \leq \frac{3}{2}\sqrt{abc}$

Bài 4. Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn 2 + a + b + c = abc.

Chứng minh rằng: $2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) \leq a + b + c + 6$.

(còn tiếp)

Lớp chuyên Toán thầy Sổ

Liên hệ: 093.464.1088

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. X. V. Côнhiagin, G. A. Tônôian, I. F. Sarưghin: Các đề thi vô địch toán của các nước (Nguyễn Đễ, Nguyễn Khánh Nguyên dịch từ tiếng Nga), Nhà xuất bản Hải Phòng, 1993.

2. Đề thi HSG các cấp của các quận(huyện), tỉnh(thành phố) trên cả nước, đề thi VMO, IMO.

3. Tạp chí Toán học và Tuổi trẻ.

4. Các chuyên đề SEMINAR Hội toán học Hà Nội.

5. Các website về Toán học trong nước và nước ngoài.