Thứ Bảy, 8. Tháng Bảy 2023

Bài 1. Xác định tất cả các hợp số $n > 1$ thoả mãn điều kiện sau: nếu $d_1, d_2, \ldots, d_k$ là tất cả các ước nguyên dương của n với $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k = n$, thì d_i là ước của $d_{i+1} + d_{i+2}$ với mọi $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC với $AB < AC$. Gọi Ω là đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC. Gọi S là điểm chính giữa cung CB của Ω có chứa A. Đường vuông góc từ A đến BC cắt BS tại D và cắt lại Ω tại $E \neq A$. Đường thẳng qua D song song với BC cắt đường thẳng BE tại L. Kí hiệu đường tròn ngoại tiếp của tam giác BDL bởi ω. Đường tròn ω cắt lại Ω tại $P \neq B$.
Chứng minh rằng đường tiếp tuyến của ω tại P cắt đường thẳng BS tại một điểm nằm trên đường phân giác trong của $\angle BAC$.

Bài 3. Với số nguyên $k \geqslant 2$, xác định tất cả các dãy vô hạn các số nguyên dương $a_1, a_2, \ldots$, để khi đó tồn tại đa thức P có dạng $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ với $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ là các số nguyên không âm, sao cho

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\cdots a_{n+k}$$

với mọi số nguyên $n \geqslant 1$.

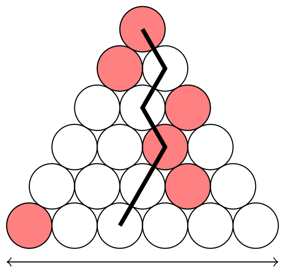
Chủ Nhật, 9. Tháng Bảy 2023

Bài 4. Cho $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ là các số thực dương đôi một phân biệt sao cho

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

là một số nguyên với mọi $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Chứng minh rằng $a_{2023} \geqslant 3034$.

Bài 5. Cho n là một số nguyên dương. Một *tam giác Nhật Bản* gồm $1 + 2 + \cdots + n$ hình tròn được xếp thành một hình tam giác đều sao cho với mỗi $i = 1, 2, \ldots, n$, hàng thứ i có đúng i hình tròn và trên hàng đó có đúng một hình tròn được tô màu đỏ. Một *đường đi ninja* trong một tam giác Nhật Bản là một dãy gồm n hình tròn nhận được bằng cách xuất phát từ hàng trên cùng, đi lần lượt từ một hình tròn xuống một trong hai hình tròn ngay dưới nó, và kết thúc tại hàng dưới cùng. Trong hình vẽ là một tam giác Nhật Bản với $n = 6$ và một đường đi ninja có chứa hai hình tròn màu đỏ.



Như một hàm số của n, tìm giá trị lớn nhất của k sao cho trong mỗi tam giác Nhật Bản luôn có một đường đi ninja chứa ít nhất k hình tròn màu đỏ.

Bài 6. Cho tam giác đều ABC. Các điểm A_1, B_1, C_1 nằm trong tam giác ABC sao cho $BA_1 = A_1C$, $CB_1 = B_1A$, $AC_1 = C_1B$ và

$$\angle BA_1C + \angle CB_1A + \angle AC_1B = 480^\circ.$$

Cho BC_1 và CB_1 cắt nhau tại A_2, CA_1 và AC_1 cắt nhau tại B_2, AB_1 và BA_1 cắt nhau tại C_2. Chứng minh rằng nếu $A_1B_1C_1$ là tam giác không cân thì các đường tròn ngoại tiếp của ba tam giác AA_1A_2, BB_1B_2 và CC_1C_2 sẽ đi qua hai điểm chung.

(Lưu ý: tam giác không cân là tam giác không có hai cạnh nào với độ dài bằng nhau.)

Thời gian: 4 giờ 30 phút.
Mỗi bài được 7 điểm.